Gloria Serrano Sotelo
Departamento de MATEMÁTICAS

## 1. Espacio vectorial. Subespacios vectoriales

Sea $k$ un cuerpo.

**Definición 1.1.** Un **$k$-espacio vectorial** o espacio vectorial sobre $k$ es un conjunto $E$ con dos operaciones, suma y multiplicación por elementos de $k$, que verifican:

**Suma**

1. Es una operación *cerrada*: $e + e' \in E$, cualesquiera que sean $e, e' \in E$.
2. Es *asociativa*: $(e + e') + e'' = e + (e' + e'')$, cualesquiera que sean $e, e', e'' \in E$.
3. Tiene *elemento neutro*: Existe $0 \in E$ tal que $0 + e = e + 0 = e$, para todo $e \in E$.
4. Todo elemento de $E$ posee un *opuesto*: Para cada $E \in E$ existe $-e \in E$ tal que $e + (-e) = (-e) + e = 0$.
5. Es *conmutativa*: $e + e' = e' + e$, cualesquiera que sean $e, e' \in E$.

**Multiplicación por elementos de $k$**

1. Es una operación *cerrada*: $\lambda e \in E$, cualesquiera que sean $\lambda \in k$ y $e \in E$.
2. $\lambda(e + e') = \lambda e + \lambda e'$, cualesquiera que sean $\lambda \in k$ y $e, e' \in E$.
3. $(\lambda\mu)e = \lambda(\mu e)$, cualesquiera que sean $\lambda, \mu \in k$ y $e \in E$.
4. $(\lambda + \mu)e = \lambda e + \mu e$, cualesquiera que sean $\lambda, \mu \in E$ y $e \in E$.
5. $1e = e$, siendo 1 la unidad de $k$.

Los elementos del espacio vectorial $E$ se llaman *vectores* y los del cuerpo base $k$ *escalares*.

**Ejemplos 1.2.**
• $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in k, 1 \leq i \leq n\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones: *Suma* $(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$ y *multiplicación por escalares* $\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.
• $k[x] = \{$polinomios en $x$ con coeficientes en $k\}$ es un $k$- espacio vectorial con las operaciones suma de polinomios y producto de un polinomio por un escalar.
• $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones suma de números complejos y producto de un número complejo por un número real.
• $\mathbb{C}$ es también un $\mathbb{C}$-espacio vectorial respecto de la suma y el producto de números complejos.
• Matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en $k$

$$M(m \times n, k) = \{A = (a_{ij}) : a_{ij} \in k, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

es un $k$- espacio vectorial con las operaciones: Suma de matrices, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, y producto de una matriz por un escalar, $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Una **combinación lineal** de los vectores $e_1, \dots, e_n \in E$ es un vector de $E$ de la forma $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ para ciertos escalares $\lambda_1 \dots \lambda_n \in k$.
*Los subconjuntos del espacio vectorial $E$ que conservan la estructura lineal son los que son cerrados por combinaciones lineales*:

**Definición 1.3.** Un subconjunto $V$ de $E$ es un **subespacio vectorial** de $E$ si es cerrado por combinaciones lineales, es decir, si $\lambda v + \mu v' \in V$ cualesquiera que sean $v, v' \in V$ y $\lambda, \mu \in k$.

**Ejemplos 1.4.**
• Las rectas y los planos que pasan por el origen son subespacios de $\mathbb{R}^3$.
• Los polinomios de grado menor o igual que dos forman un subespacio de $k[x]$.
• El conjunto $S(n,k) = \{A \in M(n,k) : A = A^t\}$ de las matrices simétricas de orden $n$ con coeficientes en $k$ es un subespacio vectorial de $M(n,k)$

Se representa por $\langle e_1, \dots e_n \rangle$ el conjunto de las combinaciones lineales de los vectores $e_1, \dots, e_n$. Por definición, $\langle e_1, \dots e_n \rangle$ es un subespacio vectorial de $E$, el **subespacio generado por los vectores** $e_1, \dots, e_n$.
Si $E = \langle e_1, \dots e_n \rangle$, es decir, si todo vector de $E$ se expresa como combinación lineal de $e_1, \dots, e_n$, se dice que $\{e_1, \dots, e_n\}$ forman un **sistema de generadores de** $E$.

**Ejemplos 1.5.**
• Los polinomios $1, x, x^2$ generan el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a cero.
• Los vectores $u = (1,0,1), v = (0,1,2)$ forman un sistema de generadores del plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x + 2y - z = 0$.
• Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generan $S(2,\mathbb{R})$.

## 2. Dependencia e independencia lineal. Bases. Dimensión

Sea $E$ un $k$-espacio vectorial.
Los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $E$ son **linealmente dependientes** si alguno de ellos es combinación lineal de los otros, esto es, si $e_i = \alpha_1 e_1 + \cdots + \hat{e_i} + \cdots + \alpha_n e_n$ para ciertos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$.
Los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $E$ son **linealmente independientes** si ninguno de ellos es combinación lineal de los restantes o, lo que es equivalente, si existe una combinación lineal de ellos igual al vector cero, necesariamente los escalares de la combinación lineal son cero, si $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

**Definición 2.1.** Los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ forman una **base** de $E$ si generan $E$ y son linealmente independientes.

El vector cero es combinación lineal de cualesquiera vectores, $0 = 0e_1 + \cdots + 0e_n$, luego nunca puede formar parte de una base.

**Teorema 2.2.** *(Caracterización de una base) Los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ forman una base de $E$ si y sólo si cualquier vector de $E$ se puede expresar de modo único como combinación lineal de ellos.*

*Demostración.*
• Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de $E$, probaremos que para todo vector $e$ de $E$ existen escalares únicos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $e = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$:
Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ generan $E$, cualquiera que sea $e \in E$ es $e = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ para ciertos $\lambda_i \in k$. Además, los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son únicos, pues si existen otros escalares $\mu_1, \dots, \mu_n$ tales que $e = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$, igualando, resulta que $(\lambda_1 - \mu_1)e_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)e_n = 0$, de donde se deduce que $\lambda_1 - \mu_1 = \cdots = \lambda_n - \mu_n = 0$ ya que $\{e_1, \dots, e_n\}$ son linealmente independientes, luego $\lambda_1 = \mu_1 \dots \lambda_n = \mu_n$.
• Recíprocamente, si todo vector de $E$ se expresa de modo único como combinación lineal de los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ demostraremos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ forman una base de $E$:
$\{e_1, \dots, e_n\}$ generan $E$ pues todo vector de $E$ es combinación lineal de ellos y son linealmente independientes, ya que si $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ necesariamente $\lambda_1 = \dots \lambda_n = 0$ pues el vector cero es $0 = 0e_1 + \cdots + 0e_n$ y por hipótesis los escalares de la combinación lineal son únicos. □

Si $e = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ es la expresión del vector $e$ en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $E$, los escalares $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ son las **coordenadas del vector** $e$ en esa base.

**Ejemplos 2.3.**
• Los vectores $\{(1,0,0\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,0,\dots,1)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^n$.
• Los números complejos $\{1,i\}$ forman una base de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
• Los polinomios $\{1,x,x^2\}$ forman una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos. Las coordenadas del polinomio $5-3x+2x^2$ en esta base son $(5,-3,2)$.
• Los vectores $u=(1,0,1), v=(0,1,2)$ forman una base del plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x+2y-z=0$. Las coordenadas, respecto de esa base, del vector $e=(1,1,3)$ del plano son $(1,1)$, pues $e=u+v$.
• Las matrices $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ y $A_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ definen una base de $S(2,\mathbb{R})$. Las coordenadas de la matriz simétrica $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&1\end{pmatrix}$ en esa base son $(2,3,1)$, ya que $A=2A_1+3A_2+A_3$.

Probaremos ahora que **toda colección de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial se puede ampliar hasta formar una base del espacio**.

**Teorema 2.4. (Teorema de Steinitz)** *Sean $\{v_1,\dots,v_m\}$ vectores linealmente independientes de $E$ y $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de $E$. Se pueden sustituir $m$ vectores de la base $\{e_1,\dots,e_n\}$ por los vectores $\{v_1,\dots,v_m\}$ para obtener una nueva base de $E$.*

*Demostración.* Iremos sustituyendo, uno a uno, $m$ vectores de la base $\{e_i\}$ por los vectores $\{v_1,\dots,v_m\}$.
• Probaremos que $\{v_1,e_2,\dots,e_n\}$ es una base de $E$.
Como $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base y $v_1\in E$ es $v_1=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n$ **(1)**
y no todos los escalares $\{\lambda_i\}$ son nulos, pues en ese caso $v_1=0$ y el vector cero no puede formar parte de una colección de vectores linealmente independientes.
Podemos suponer, reordenando la base si es preciso, que $\lambda_1\neq 0$. Despejando, resulta que $e_1=\frac{1}{\lambda_1}v_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}e_n-\cdots-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}e_n$, de lo que se deduce que los vectores $\{v_1,e_2\dots,e_n\}$ generan $E$.
Los vectores $\{v_1,e_2\dots,e_n\}$ son linealmente independientes ya que si $\mu_1v_1+\cdots+\mu_ne_n=0$, sustituyendo $v_1$ por **(1)** se obtiene $\mu_1\lambda_1e_1+(\mu_1\lambda_2+\mu_2)e_2+\cdots+(\mu_1\lambda_n+\mu_n)e_n=0$ y $\mu_1\lambda_1=\mu_1\lambda_2+\mu_2=\cdots=\mu_1\lambda_n+\mu_n=0$ por ser $\{e_1,\dots,e_n\}$ linealmente independientes. Por otra parte, como $\lambda_1\neq 0$ debe ser $\mu_1=0$, de lo que se deduce que también $\mu_2=\cdots=\mu_n=0$.
• Probaremos que $\{v_1,\dots,v_m,\dots,e_n\}$ es una base de $E$.
Supongamos que ya hemos sustituido $m-1$ vectores de la base $\{e_1,\dots,e_n\}$ por vectores $v_i$. Reordenando si es preciso, podemos suponer que hemos sustituido los $m$ primeros y que tenemos la nueva base $\{v_1,\dots,v_{m-1},e_m,\dots,e_n\}$. Expresando $v_m$ en función de esta base se tiene

$$v_m=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_{m-1}v_{m-1}+\beta_me_m+\cdots+\beta_ne_n\,,$$

donde algún $\beta_i$ tiene que ser no nulo, pues en otro caso $v_m$ sería combinación lineal de $\{v_2,\dots,v_m\}$ y hemos supuesto que $\{v_1,\dots,v_m\}$ son linealmente independientes. Como antes, reordenando si es necesario, podemos suponer que $\beta_m\neq 0$. Y el mismo argumento del apartado anterior prueba que podemos sustituir $e_m$ por $v_m$ de manera que $\{v_1,\dots,v_m,\dots,e_n\}$ es una base de $E$. □

**Teorema 2.5. (Teorema de la base)** *Todas las bases de un $k$-espacio vectorial tienen el mismo número de elementos.*
*Se llama dimensión del espacio vectorial $E$ al número de elementos de una base y se representa por $\dim_k E$.*

*Demostración.* Sean $\{e_1,\dots,e_n\}$ y $\{e'_1,\dots,e'_m\}$ dos bases de $E$. Por el teorema de Steinitz aplicado a la base $\{e_1,\dots,e_n\}$ y a los vectores linealmente independientes $\{e'_1,\dots,e'_m\}$, debe ser $m\le n$, y ahora a la base $\{e'_1,\dots,e'_m\}$ y a los vectores linealmente independientes $\{e_1,\dots,e_n\}$ da $n\le m$. Por tanto, $n=m$. □

Es claro que **la dimensión de un espacio vectorial coincide con el número máximo de vectores linealmente independientes y con el número mínimo de generadores**. Por tanto, **en un espacio vectorial de dimensión $n$ cualesquiera $n$ vectores linealmente independientes forman una base**.

**Ejemplos 2.6.**
• $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$
• $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ y $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ pues $\mathbb{C} = \langle 1, i\rangle$ considerado como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\mathbb{C} = \langle 1\rangle$ considerado como $\mathbb{C}$-espacio vectorial
• Los vectores $v_1 = (2,0,3,1)$, $v_2 = (-3,1,1,1)$, $v_3 = (-1,1,2,0)$ y $v_4 = (0,1,1,2)$ forman una base de $\mathbb{R}^4$, pues son linealmente independientes, ya que $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) \neq 0$, y $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4 = 4$.
• Los polinomios $\{1, x, x^2\}$ forman una base del espacio vectorial $E$ de los polinomios de grado menor o igual a dos, luego $\dim_k E = 3$. Las coordenadas de los polinomios $\{1-2x, x^2+1, 2+x-x^2\}$ respecto de la base de $E$ anterior son $(1,-2,0)$, $(1,0,1)$ y $(2,1,-1)$ respectivamente, y como estos vectores son linealmente independientes ya que su determinante es distinto de cero, resulta que $\{1-2x, x^2+1, 2+x-x^2\}$ es otra base del espacio $E$ de los polinomios de grado menor o igual a dos.

## 3. Problemas propuestos

1. Probar que el conjunto de matrices cuadradas diagonales con coeficientes en un cuerpo $k$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $k$.
2. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales:
   *a)* $E = \{(0, x_2, \dots, x_n)\}$
   *b)* $E = \{(1, x_2, \dots, x_n)\}$
   *c)* $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\colon x_i \in \mathbb{Q}\}$
   *d)* $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\colon \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$
   *e)* $E = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\colon \sum_{i=1}^n x_i = 5\}$
3. Sea $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el espacio de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Estudiar si $E$ es un subespacio de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donde:
   *a)* $E = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})\colon f(3) = 0\}$
   *b)* $E = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})\colon f(1) = f(2)\}$
   *c)* $E = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})\colon f(-x) = -f(x)\}$
   *d)* $E = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})\colon f \text{ es continua}\}$
   *e)* $E = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})\colon f \text{ es derivable}\}$
4. Demostrar que los vectores $(-5,2,8,-16)$, $(-5,3,17,-14)$, $(1,1,11,6)$ de $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes.
5. Demostrar que los vectores $(m,1,0)$, $(-1,m,0)$ y $(0,1,1)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, sea quien sea $m$. Comprobar que esta propiedad no se cumple en $\mathbb{C}^3$.
6. Considérense las matrices $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & x \\ -3 & y \end{pmatrix}$. Determinar $x$ e $y$ para que dichas matrices sean linealmente independientes.
7. Pruébese que las funciones $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$ son linealmente independientes sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.
   Pruébese otro tanto para las funciones $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son $n$ números reales distintos.
8. Demostrar que el subespacio $E = \{(a,b,0)\colon a, b \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$ está generado por cualquiera de los pares de vectores siguientes:
   *a)* $e = (1,1,0)$, $e' = (1,0,0)$
   *b)* $e = (2,-1,0)$, $e' = (-1,-1,0)$

9. Determinar $x$ e $y$ en el vector $(3, 2, x, y) \in \mathbb{Q}^4$ para que pertenezca al subespacio generado por $(1, 4, -5, 2)$, $(1, 2, 3, 1)$.
10. Pruébese que el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 1, 1), (0, 1, 0)$ coincide con el subespacio generado por $(2, 3, 2)$ y $(1, 0, 1)$.
11. Hallar un vector común al subespacio $E_1$ engendrado por los vectores $(1, 2, 3)$ y $(3, 2, 1)$ y al subespacio $E_2$ engendrado por $(1, 0, 1)$ y $(3, 4, 3)$.
12. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$.
    *a*) Encontrar el valor de $m$ para que existan matrices cuadradas no nulas $B$ tales que $AB = 0$.
    *b*) Demostrar que dichas matrices (incluida el 0) forman un subespacio vectorial. Encontrar un sistema de generadores linealmente independientes.
13. Averiguar si $V$ es un subespacio vectorial real y en caso afirmativo calcula una base y su dimensión:
    *a*) $V = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$
    *b*) $V = \{(a, b, c) : a + b + c = 0\}$
    *c*) $V = \{(a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 \geq 1\}$
    *d*) $V = \{(a, b, c) : a = b + c\}$
    *e*) $V = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
14. En un espacio vectorial $E$ sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ se dan tres vectores $a, b, c$ y se consideran los vectores
$$u = b + c, \quad v = c + a, \quad w = a + b$$
    *a*) Probar que los subespacios vectoriales engendrados por $a, b, c$ y por $u, v, w$ son el mismo.
    *b*) Demostrar que los vectores $u, v, w$ son linealmente independientes sí y sólo si lo son $a, b, c$.
15. Determinar $\lambda$ para que los vectores $(2, 4, 6), (1, 2, 3), (5, \lambda, 15)$ estén en un mismo plano (subespacio de dimensión 2).
16. Determinar en $\mathbb{Q}^5$ una base del subespacio generado por los vectores $(1, 2, -4, 3, 1)$, $(6, 17, -7, 10, 22)$, $(2, 5, 0, -3, 8)$, $(1, 3, -3, 2, 0)$.
17. Demostrar que el subconjunto $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y calcular una base del mismo. ¿Cuál es su dimensión?.
18. Comprobar que los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$ forman una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y calcular las coordenadas del vector $(4, 6, 12)$ respecto de esta base.
19. Comprobar que los vectores $e = (1, -1, 0)$, $e' = (2, 1, 0)$, $e'' = (0, 1, 1)$ forman una base. Encontrar las coordenadas respecto de la misma del vector $(1, 1, 1)$.
20. Comprobar que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forman una base del espacio vectorial de las matrices de orden 2. Calcular las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de esta base.
21. Consideremos el espacio vectorial de los polinomios $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor que 3.
    *a*) Demostrar que los polinomios $1 + x$, $x + x^2$, $1 + x^2$ forman una base.
    *b*) Hallar las coordenadas del polinomio $3 + 2x + 5x^2$ en dicha base.
22. ¿Cuál es la condición para que dos números complejos
$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$
formen una base del espacio vectorial real de los números complejos?.
23. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y se pide:
    *a*) Hallar una base que contenga al vector $(1, 2, 1, 1)$.

*b*) Hallar una base que contenga a los vectores $(1, 1, 0, 2)$ y $(1, -1, 2, 0)$.
*c*) Hallar una base que contenga a los vectores $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 2, 2)$ y $(0, 3, 3, 0)$.

24. Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^3$ $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$.
    *a*) Demostrar que forman una base de $\mathbb{R}^3$.
    *b*) Hallar las coordenadas de los vectores de la base $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ ("*base canónica o estándar*") respecto de esta base.
25. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los vectores $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 2, 0, 0)$. Completar a una base de $\mathbb{R}^4$.
26. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual que 3, demostrar que $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x + 1$, $p_2(x) = (x + 1)^2$, $p_3(x) = (x + 1)^3$ forman una base. Calcular las coordenadas del polinomio $2x^3 + x^2 - 4x - 4$ en dicha base.
27. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios en una variable, de grado menor o igual que 2. Sea $M$ el subespacio engendrado por:
    $$\{x^2 - 1, x + 1, x^2 - 7x - 8\}$$
    Hallar una base de $\mathbb{R}_2[x]$ que contenga a una base de $M$.
28. Sea $B = \{e, e', e''\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $v$ un vector cuyas coordenadas respecto de $B$ son $(1, -1, 2)$.
    *a*) Demostrar que el conjunto $S = \{e + e', e + e' + e''\}$ es linealmente independiente.
    *b*) Completar $S$ a una base $B'$ tal que las coordenadas de $v$ respecto de $B'$ sean $(1, 1, 1)$.
29. Se consideran sobre $\mathbb{R}^4$ los vectores $(1 + \lambda, 1, 1, 1)$, $(1, 1 + \lambda, 1, 1)$, $(1, 1, 1 + \lambda, 1)$, $(1, 1, 1, 1 + \lambda)$. Determinar en función de $\lambda$ la dimensión del subespacio que generan y calcular una base.
30. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ el subespacio $E'$ de los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tales que $2x_1 + 3x_2 = 2x_3 + 3x_4$. Probar que los vectores $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 1)$ son linealmente independientes y están en $E'$. Extenderlos a una base de $E'$.
31. Probar que los polinomios $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1 - x$, $p_2(x) = 1 - x^2$, $p_3(x) = x - x^3$ forman base del espacio vectorial real $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que 3.