VNiVERSiDAD
Ð SALAMANCA

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA I
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

SEMINARIO I.

1. Espacios Vectoriales

1.1. Espacios y subespacios vectoriales.

1. Demuéstrese que el conjunto $C = \{(x, y, y, -x), x, y \in \mathbb{R}\}$ con la operación:
$$(x, y, y, -x) + (w, z, z, -w) = (x + w, y + z, y + z, -(x + w))$$
y con el producto escalar para $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\lambda(x, y, y, -x) = (\lambda x, \lambda y, \lambda y, -\lambda x)\,,$$
es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
2. Averiguar si $V \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio vectorial real.
   a) $V = \{(a, b, 0) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$
   b) $V = \{(a, b, c) \colon a + b + c = 0\}$
   c) $V = \{(a, b, c) \colon a^2 + b^2 + c^2 \geq 1\}$
   d) $V = \{(a, b, c) \colon a = b + c\}$
   e) $V = \{(a, b, c) \colon a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
3. Determina si los siguientes subconjuntos de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ son subespacios vectoriales:
   a) $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.
   b) $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.
   c) El conjunto de las matrices antisimétricas.
   d) El conjunto de las matrices A que cumplen $A^2 = A$.
   e) El conjunto de matrices cuyo determinante no es cero.

1.2. Dependencia lineal, bases, dimensión y coordenadas.

4. Pruébese que el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 1, 1), (0, 1, 0)$ coincide con el subespacio generado por $(2, 3, 2)$ y $(1, 0, 1)$.
5. Demostrar que los vectores $(m, 1, 0)$, $(-1, m, 0)$ y $(0, 1, 1)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, sea quien sea m. Comprobar que esta propiedad no se cumple en $\mathbb{C}^3$.
6. Determinar x e y en el vector $(3, 2, x, y) \in \mathbb{Q}^4$ para que pertenezca al subespacio generado por $(1, 4, -5, 2)$, $(1, 2, 3, 1)$.
7. Calcula una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:
   a) $V = \{(a, b, 0) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$
   b) $V = \{(a, b, c) \colon a + b + c = 0\}$
   c) $V = \{(a, b, c) \colon a = b + c\}$
8. Comprobar que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forman una base del espacio vectorial de las matrices de orden 2. Calcular las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de esta base.
9. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios $p(x)$ de grado menor o igual que 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$.
   a) Demostrar que los polinomios $1 + x$, $x + x^2$, $1 + x^2$ forman una base.
   b) Hallar las coordenadas del polinomio $3 + 2x + 5x^2$ en dicha base.

ALGUNAS SOLUCIONES. SEMINARIO I.

2. Averiguar si $V \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio vectorial real.
   a) $V = \{(a, b, 0)\colon a, b \in \mathbb{R}\}$
   b) $V = \{(a, b, c)\colon a + b + c = 0\}$
   c) $V = \{(a, b, c)\colon a^2 + b^2 + c^2 \geq 1\}$
   d) $V = \{(a, b, c)\colon a = b + c\}$
   e) $V = \{(a, b, c)\colon a, b, c \in \mathbb{Q}\}$

   SOLUCIÓN:
   a) Por el teorema de caracterización de subespacios vectoriales basta demostrar si para cualesquiera $v, v' \in V$ y para cualesquiera escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lambda v + \mu v' \in V$. En efecto, sean $v = (a, b, 0), v' = (a', b', 0) \in V$ con $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene (suma y producto por escalares en $\mathbb{R}^3$):
   $$\lambda v + \mu v' = (\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', 0)\,.$$
   Como $\mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$-espacio vectorial se verifica que $\lambda a + \mu a' \in \mathbb{R}$ y $\lambda b + \mu b' \in \mathbb{R}$ y por lo tanto (definición de V) se concluye que $\lambda v + \mu v' \in V$.
   b) Sean $v = (a, b, c), v' = (a', b', c') \in V$ vectores cualesquiera de V, es decir, se tiene:
   $$a + b + c = 0 \quad \text{y} \quad a' + b' + c' = 0\,.$$
   Veamos que para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se verifica que:
   $$\lambda v + \mu v' = (\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c') \in V,$$
   es decir, hemos de comprobar si:
   $$\lambda a + \mu a' + \lambda b + \mu b' + \lambda c + \mu c' = 0\,.$$
   Efectivamente, basta sacar factor común a λ y μ ($\mathbb{R}$ es espacio vectorial) y usar que $a+b+c = 0$ y $a' + b' + c' = 0$.
   c) V no es subespacio pues $(0, 0, 0) \notin V$ (ya que $0^2 + 0^2 + 0^2 \ngeq 1$).
   d) Se resuelve de modo análogo a b).
   e) Veamos que V no es $\mathbb{R}$-espacio vectorial, para lo cual comprobaremos que la multiplicación por escalares no es cerrada. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v = (a, b, c) \in V$, es decir, $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Entonces $\lambda v = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \notin V$ porque λa, λb y λc no tienen por qué ser números racionales. Tómese por ejemplo $\lambda = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ y $a = 1 \in \mathbb{Q}$.

7. Calcula una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:
   a) $V = \{(a, b, 0)\colon a, b \in \mathbb{R}\}$
   b) $V = \{(a, b, c)\colon a + b + c = 0\}$
   c) $V = \{(a, b, c)\colon a = b + c\}$

   SOLUCIÓN:
   a) $V = \{(a, b, 0)\colon a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0)\colon a, b \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$. Luego V está generado por $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$, y como estos vectores no son proporcionales, son linealmente independientes (L.I.) y forman base.
   b)
   $$\begin{aligned} V &= \{(a, b, c)\colon a + b + c = 0\} = \{(a, b, c)\colon c = -a - b\} = \{(a, b, -a - b)\colon a, b \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1)\colon a, b \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 0, -1), (0, 1, -1)\rangle \end{aligned}$$
   c)
   $$\begin{aligned} V &= \{(a, b, c)\colon a = b + c\} = \{(b + c, b, c)\colon b, c \in \mathbb{R}\} = \{b(1, 1, 0) + c(1, 0, 1)\colon b, c \in \mathbb{R}\} = \\ &= \langle(1, 1, 0), (1, 0, 1)\rangle \end{aligned}$$

8. Comprobar que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forman una base del espacio vectorial de las matrices de orden 2. Calcular las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de esta base.

SOLUCIÓN: Por la teoría sabemos que el k-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 es de dimensión 4 y por tanto, para que 4 vectores (i.e. 4 matrices) formen base basta que sean L.I. Sean $a, b, c, d \in k$ y supongamos que:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

veamos que entonces $a = b = c = d = 0$. En efecto, por definición de suma de matrices y producto de matrices por escalares la ecuación anterior se traduce en:

$$\begin{pmatrix} a+b+c & b+c \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde resulta que $a = b = c = d = 0$.

Para calcular las coordenadas de $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es esta base hemos de utilizar el teorema de caracterización de una base: "todo vector de un espacio vectorial se expresa de modo único como combinación lineal de los elementos de la base", los coeficientes de dicha combinación lineal (que llamaremos α, β, γ, δ) son precisamente las coordenadas que se buscan.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \beta+\gamma \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Luego las coordenadas son $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ y $\delta = 1$.