VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

SEMINARIO II.

## 1.3. Suma, intersección y suma directa de subespacios.

10. Sea $F$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $(1,1,-1)$ y $G$ el subespacio de ecuaciones $3x-y=0$, $2x+z=0$. Determinar $F\cap G$.

11. Considérense los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$: $E_1 =< (1,0,-1,0),(2,-1,2,0),(3,-2,3,0) >$ y $E_2 =< (0,1,1,0),(1,1,3,0),(-2,1,1,1) >$.
    *a*) Calcular bases y dimensiones de $E_1$, $E_2$, $E_1+E_2$, $E_1\cap E_2$.
    *b*) ¿Se verifica que $\mathbb{R}^4 = E_1 \oplus E_2$?
    *c*) Calcula dos subespacios suplementarios diferentes de $E_1$.

12. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$ generados por los siguientes vectores:
$$E_1 =< (1,0,1,1),(0,1,1,1) >, \quad E_2 =< (1,-1,1,0),(1,1,1,1),(1,0,1,1) >$$
Se pide:
    *a*) Hallar las dimensiones de $E_1$, $E_2$, $E_1+E_2$, $E_1\cap E_2$.
    *b*) Estudiar si $E_1+E_2=\mathbb{R}^4$.
    *c*) ¿$E_1$ y $E_2$ son subespacios suplementarios?

13. Sean $E$ y $E'$ dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por:
$$E=\{(a,b,c)\colon a=b=c\}, \quad E'=\{(0,b,c)\colon b,c\in\mathbb{R}\}$$
Demostrar que $\mathbb{R}^3 = E\oplus E'$.

14. Sea $E=M(2,\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$ y sea $V$ el subconjunto de $E$ definido por:
$$V=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix}\in E : 2x-y+t=0, x=z\right\}.$$
    *a*) Probar que $V$ es un subespacio vectorial de $E$ y calcular su dimensión y una base.
    *b*) Calcular las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2\end{pmatrix}\in V$ en la base elegida en el apartado anterior.
    *c*) Calcular un suplementario de $V$.

15. Sean los subespacios de $\mathbb{C}^3$:
$$E=\big\langle(1,2i,-1+i),(2,0,1+2i)\big\rangle \quad \text{y}$$
$$F=\big\langle(3+i,1-i,1),(-3,1+4i,5i)\big\rangle.$$
Describe $E+F$ y $E\cap F$. ¿Están $E$ y $F$ en suma directa? ¿Pertenece $e=(i,2+2i,1-3i)$ a alguno de estos subespacios?

16. Sea $E=\langle 1,x,x^2,x^3\rangle$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 y sea $V=\{p(x)\in E : p(1)=0\}$.
    *a*) Probar que $V$ es un subespacio de $E$ y calcular su dimensión y una base.
    *b*) Calcular las coordenadas del polinomio $x^2-3x+2\in V$ respecto de la base del apartado anterior.
    *c*) Encuentra un subespacio suplementario de $V$.

ALGUNAS SOLUCIONES. SEMINARIO II.

11. Considérense los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$: $E_1 =< (1,0,-1,0),(2,-1,2,0),(3,-2,3,0) >$ y $E_2 =< (0,1,1,0),(1,1,3,0),(-2,1,1,1) >$.
   *a*) Calcular bases y dimensiones de $E_1$, $E_2$, $E_1+E_2$, $E_1\cap E_2$.
   *b*) ¿Se verifica que $\mathbb{R}^4 = E_1\oplus E_2$?
   *c*) Calcula dos subespacios suplementarios diferentes de $E_1$.

   SOLUCIÓN:

   *a*) El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ es no nulo y por lo tanto $\dim_{\mathbb{R}} E_1 = 3$ y los vectores dados forman base. Análogamente se demuestra que $\dim_{\mathbb{R}} E_2 = 3$ y de nuevo los vectores dados forman base de $E_2$. Para calcular una base de $E_1+E_2$ observemos que:
   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0\,,$$
   luego $\dim_{\mathbb{R}}(E_1+E_2) = 4$ y una base está formada por los vectores:
   $$\{(1,0,-1,0),(2,-1,2,0),(3,-2,3,0),(-2,1,1,1)\}\,.$$
   Utilizando la fórmula de la dimensión:
   $$\dim_{\mathbb{R}}(E_1+E_2) = \dim_{\mathbb{R}} E_1 + \dim_{\mathbb{R}} E_2 - \dim_{\mathbb{R}}(E_1\cap E_2)$$
   se sigue que $\dim_{\mathbb{R}}(E_1\cap E_2) = 2$. Como $(0,1,1,0)$ y $(1,1,3,0)$ son dos vectores L.I. que están en $E_2$ y en $E_1$ (pues el determinante de la matriz que forma cada uno de ellos con los vectores de la base de $E_1$ es nulo) y la dimensión de $E_1\cap E_2$ es 2, entonces forman base de la intersección:
   $$E_1\cap E_2 = \langle (0,1,1,0),(1,1,3,0)\rangle$$
   *b*) Para que $\mathbb{R}^4 = E_1\oplus E_2$ ha de verificarse que $\mathbb{R}^4 = E_1+E_2$ y $E_1\cap E_2 = \{0\}$. Por el apartado anterior es cierto que $\mathbb{R}^4 = E_1+E_2$, pero $\dim_{\mathbb{R}}(E_1\cap E_2) = 2$. Luego no es cierto que $\mathbb{R}^4 = E_1\oplus E_2$.
   *c*) Para calcular un suplementario a $E_1$ basta con ampliar su base a una de $\mathbb{R}^4$, para lo cual es suficiente con dar un vector de $\mathbb{R}^4$ de modo que el determinante de la matriz que forma con los 3 vectores de la base de $E_1$ sea no nulo. Se deduce entonces que los subespacios $V_1 = \langle(-2,1,1,1)\rangle$ y $V_2 = \langle(0,0,0,1)\rangle$ son dos subespacios suplementarios distintos de $E_1$, es decir:
   $$E_1\oplus V_1 = \mathbb{R}^4 \quad \text{y} \quad E_1\oplus V_2 = \mathbb{R}^4\,.$$

16. Sea $E = \langle 1,x,x^2,x^3\rangle$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 y sea $V = \{p(x)\in E : p(1) = 0\}$.
   *a*) Probar que $V$ es un subespacio de $E$ y calcular su dimensión y una base.
   *b*) Calcular las coordenadas del polinomio $x^2-3x+2\in V$ respecto de la base del apartado anterior.
   *c*) Encuentra un subespacio suplementario de $V$.

   SOLUCIÓN:

   *a*) Por definición, todos los polinomios en $V$ tienen la raíz 1, luego si $p(x)\in V$ se puede escribir:
   $$p(x) = (x-1)\cdot\bar{p}(x)$$
   donde $\bar{p}(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a 2. Denotemos $\mathbb{R}_2[x]$ al $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$.
   Sean entonces $p(x),q(x)\in V$ (es decir, $p(x) = (x-1)\cdot\bar{p}(x)$ y $q(x) = (x-1)\cdot\bar{q}(x)$ con $\bar{p}(x),\bar{q}(x)\in\mathbb{R}_2[x]$) y veamos que para todos $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ se verifica que:
   $$\lambda p(x) + \mu q(x) \in V\,.$$
   Si denotamos $h(x) = \lambda p(x)+\mu q(x)$, basta ver que $h(x) = (x-1)\bar{h}(x)$ donde $\bar{h}(x)\in\mathbb{R}_2[x]$. En efecto:
   $$h(x) = \lambda p(x)+\mu q(x) = \lambda(x-1)\bar{p}(x)+\mu(x-1)\bar{q}(x) = (x-1)\big(\lambda\bar{p}(x)+\mu\bar{q}(x)\big)$$

donde $\bar{h}(x) = \lambda\bar{p}(x) + \mu\bar{q}(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a 2 por ser $\mathbb{R}_2[x]$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. En consecuencia, $V$ es subespacio vectorial de $E$.
Si $\{1, x, x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, como todo polinomio $p(x) \in V$ se escribe $(x-1)\bar{p}(x)$ con $\bar{p}(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, se deduce que $\{(x-1), (x-1)x, (x-1)x^2\}$ es una base de $V$ y su dimensión es entonces 3.

*b*) El polinomio $x^2 - 3x + 2 \in V$ se expresa de modo único como combinación lineal de los elementos de la base $\{(x-1), (x-1)x, (x-1)x^2\}$ de $V$:

$$2 - 3x + x^2 = \alpha(x-1) + \beta(x-1)x + \gamma(x-1)x^2 = -\alpha + (\alpha - \beta)x + (\beta - \gamma)x^2 + \gamma x^3$$

Luego: $\alpha = -2$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$. De otro modo:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = -2(x-1) + (x-1)x = (-2, 1, 0)\,.$$

*c*) Expresando en coordenadas los vectores de la base de $V$, $\{(-1, 1, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, 0, -1, 1)\}$ (recordemos que la base de $E$ la tomamos en el orden $\{1, x, x^2, x^3\}$), para calcular un sumplementario a $V$ hemos de completar esta base hasta una base de $\mathbb{R}^4$.
Denotemos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|A| \neq 0$, el vector $(0, 0, 0, 1)$ (i.e. el polinomio $x^3$) es L.I. a los vectores de la base de $V$ y por lo tanto $S = \langle (0, 0, 0, 1) \rangle = \langle x^3 \rangle$ es un suplementario a $V$.