Ejercicios tipo test de las lecciones 1 y 2.

1. El vector $e = (-1, 0, \lambda)$ está en el plano generado por los vectores $u = (1, 2, 1)$ y $v = (1, 3, 0)$

(a) Si $\lambda = -3$
(b) Para cualquier valor de λ
(c) En ningún caso.

2. Sea E' el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(2, 1, 0)$ y $(1, 0, -2)$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

(a) $E' = \langle (2, 1, 0), (1, 0, -2) \rangle$
(b) $E' = \langle (2, 1, 0), (1, 1, 2) \rangle$
(c) $E' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 4y + 3z = 0\}$
(d) $E' = \{(2\lambda + \mu, \lambda, -2\mu) \in \mathbb{R}^3 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

3. Los valores de α y β para los que el vector $(\alpha, 1, 5, \beta) \in \mathbb{R}^4$ pertenece al subespacio generado por los vectores $(1, 0, 2, 1)$ y $(2, 1, -1, 0)$ son:

(a) $\alpha = \beta = 5$
(b) $\alpha = 5\,,\ \beta = 3$
(c) $\alpha = 3\,,\ \beta = 5$

4. Dados los vectores $u = (2, 1, 1)$ y $v = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) Un suplementario de $\langle u, v \rangle$ es el subespacio $\langle (1, 0, 0) \rangle$.
(b) Los vectores $e_1 = (1, 0, 0)$, u y v forman una base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Un suplementario de $\langle u, v \rangle$ es el subespacio $\langle (0, 0, 1) \rangle$.

5. Dadas las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) Son linealmente independientes.
(b) Generan un subespacio de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ de dimensión 3.
(c) Forman una base de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

6. Los valores de λ y μ para los que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & \lambda & \mu \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ no son linealmente independientes son:

(a) $\lambda = 2\ ,\ \mu = 3$
(b) $\lambda = 4\ ,\ \mu = 6$
(c) $\lambda = \mu = 3$

7. Sea $V = \left\{ \begin{pmatrix} 2a - 3b & a + b \\ a + b & 3b - 2a \end{pmatrix} \text{, con } a,\, b \in \mathbb{R} \right\}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) V es un subespacio de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ de dimensión 4.
(b) V es un subespacio de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ de dimensión 2.
(c) V es un subespacio de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ de dimensión 3.

8. Sea V el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 3 que son divisibles por $x-1$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) V no tiene estructura lineal.
(b) V es un subespacio vectorial de $E = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ de dimensión 2.
(c) V es un subespacio vectorial de $E = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ de dimensión 3.

9. Sea E un espacio vectorial de dimensión n y sean E_1, E_2 subespacios de E de dimensiones n_1 y n_2 respectivamente. Es **cierto** que:

(a) Si $E = E_1 + E_2$, se verifica $E_1 \cap E_2 = \{0\}$
(b) Si $n = n_1 + n_2$, entonces $E = E_1 \oplus E_2$
(c) Si $E = E_1 + E_2$, se verifica $n = n_1 + n_2$
(d) Si $E = E_1 + E_2$, se verifica $n \leq n_1 + n_2$

10. Sea $E = \langle 1, x, x^2 \rangle$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y sea $E' = \{p(x) \in E : p(1) = p(2)\}$. Solamente una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) E' no es un subespacio vectorial de E.
(b) $E' = \langle 1, x^2 - 3x \rangle$
(c) E' es un subespacio vectorial de E de dimensión 1.
(d) E' es un subespacio de dimensión 2 de E y está generado por los polinomios $\{1, 2x\}$.

11. En $\mathbb{R}^3$ considérense el subespacio $E' = \langle (1,2,-1), (1,3,2) \rangle$ y el vector $e = (a+2b, b, a)$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) $e \in E'$ si y sólo si $a = 11$ y $b = -8$
(b) $e \in E'$ para todos los valores reales de a y b tales que $8a + 11b = 0$.
(c) $e \in E'$ si $a = 8$ y $b = -11$
(d) $e \in E'$ cualesquiera que sean los valores reales de a y b.

12. Dados los vectores $u = (3, 0, -1, 2)$, $v = (1, 1, 1, -2)$ y $w = (0, 1, 0, 3)$, cuyas coordenadas están referidas a la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$, indica cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

(a) Los vectores $\{u, e_2, e_3, e_4\}$ forman una base de $\mathbb{R}^4$.
(b) El subespacio $\langle u, v \rangle$ es un suplementario del subespacio $\langle e_3, e_4 \rangle$.
(c) El subespacio $\langle u, v, w \rangle$ es un suplementario del subespacio $\langle e_4 \rangle$.
(d) El subespacio $\langle e_1, e_2 \rangle$ es un suplementario del subespacio $\langle u, v \rangle$.

13. Sea $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) : \; b = c \right\}$. Decide cuál de las siguientes afirmaciones es **cierta**:

(a) E es un espacio vectorial de dimensión 2. ;
(b) E no tiene estructura lineal.
(c) E es un espacio vectorial de dimensión 3. ;
(d) E es un espacio vectorial de dimensión 4.

14. Dados los vectores $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, indica cuál de las siguientes afirmaciones es **cierta**:

(a) Los vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. En esta base las coordenadas del vector $v = (3, -2, -2)$ son $v = (1, 1, -2)$.
(b) No forman base.
(c) Los vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. En esta base las coordenadas del vector $v = (3, -2, -2)$ son $v = (1, -1, -2)$.

15. Considérense los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:
$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0,\ x+2y+z=0\}$; $E_2 = \langle(2,-1,1),(0,1,-1)\rangle$
Es **cierto** que:

(a) $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$;
(b) $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$
(c) $E_1 \cap E_2 = \langle(1,-1,1)\rangle$
(d) E_1 y E_2 son subespacios suplementarios.

16. Dadas las matrices $A,\ B \in M(n \times n, \mathbb{R})$, si $\det B \neq 0$ el determinante de la matriz $B^{-1} \cdot A \cdot B$ es igual a:

(a) $\det A$
(b) $\dfrac{1}{\det A}$
(c) $\det A \cdot \det B$

17. Las coordenadas del vector $e = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ respecto de la base $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (-1,0,1)$, $u_3 = (1,1,1)$ son:

(a) $(0,1,2)$
(b) $(0,2,1)$
(c) $(1,0,2)$

18. La expresión de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ respecto de la base

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ es:

(a) $2A_1 + 3A_2 - A_3 + A_4$
(b) $2A_1 - A_2 + 3A_3 + A_4$
(c) Las matrices A_1, A_2, A_3, A_4 no forman base.

19. En la base $\{(1,0,1),(0,1,1),(-1,0,2)\}$ las coordenadas del vector e son $(1,2,3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base $\{(0,0,1),(0,-1,0),(1,1,0)\}$?

(a) $(-9,4,2)$
(b) $(9,-4,-2)$
(c) $(9,-4,2)$

20. Considérense los subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 = \langle(1,0,1)\rangle \quad , \quad E_2 = \{(x,y,z) : x+y+z=0\}$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

(a) $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$.
(b) Un suplementario de E_2 es el subespacio generado por el vector $(1,0,0)$.
(c) E_1 y E_2 no son subespacios suplementarios.
(d) E_1 es una recta que corta al plano E_2 en el origen.

21. Considérense los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$E_1 = \langle(1,-1,0,1)\rangle \quad , \quad E_2 = \langle(-1,-1,1,1),(3,-1,-1,1)\rangle$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

(a) $E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0,0)\}$
(b) $E_1 + E_2 = E_2$
(c) $E_1 \subset E_2$
(d) Una base de $E_1 + E_2$ es la formada por los vectores $(1,-1,0,1)$ y $(3,-1,-1,1)$.

22. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ tal que $A \cdot A^t = I$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
(a) A es invertible.
(b) $\det A = \pm 1$.
(c) $A^{-1} = A^t$
(d) A no es invertible.

23. Sea S el subconjunto de $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ formado por las matrices simétricas ($A = A^t$). Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:
(a) S es un espacio vectorial de dimensión 2 y una base de S es $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
(b) S es un espacio vectorial de dimensión 3 y una base de S es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) S es un espacio vectorial de dimensión 3 y una base de S es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) S no es un espacio vectorial.

24. En el espacio vectorial $M(2 \times 2, \mathbb{R})$, considérese el subespacio vectorial V generado por las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:
(a) $\dim V = 1$; **b)** $A \notin V$
(b) $A \in V$ y sus coordenadas respecto de la base $\{A_1, A_2\}$ de V son $(4, 4)$.
(c) $A = 2A_1 + 2A_2$, es decir, $A \in V$ y sus coordenadas en la base $\{A_1, A_2\}$ de V son $(2, 2)$.

25. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, para $n > 1$ se verifica:
(a) $A^n = 2^n A$
(b) $A^n = 2^{n-1} A$
(c) $A^n = (-2)^n A$
(d) $A^n = (-2)^{n-1} A$

26. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
(a) A es simétrica y B es hemisimétrica.
(b) A es simétrica pero B no es hemisimétrica.
(c) A es simétrica y $A - A^t$ es hemisimétrica.
(d) B no es hemisimétrica y $B + B^t$ es simétrica.

27. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & \lambda + 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:
(a) A es invertible para $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$.
(b) A no tiene inversa, independientemente del valor que tome λ.
(c) A es invertible si $\lambda \neq 0$.

28. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, su potencia n-ésima es:

(a) $A^n = \begin{pmatrix} n & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & n \end{pmatrix}$

(b) No se puede calcular.

(c) $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

(d) $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

29. Dada la ecuación matricial $AX + B = C$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

(a) No tiene solución.

(b) Tiene solución y es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Tiene solución y es $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) Tiene infinitas soluciones.