1. Aplicaciones lineales. Núcleo e Imagen. Tipos de aplicaciones lineales.

Sean E y E' k-espacios vectoriales.

Definición 1.1. Una **aplicación** $E \xrightarrow{T} E'$ es **lineal** si $T(e+v) = T(e) + T(v)$ y $T(\lambda e) = \lambda T(e)$ o, lo que es equivalente, $T(\lambda e + \mu v) = \lambda T(e) + \mu T(v)$, cualesquiera que sean $e, v \in E$ y $\lambda, \mu \in k$.

Si $E \xrightarrow{T} E'$ es una aplicación lineal la imagen del vector cero es el vector cero:
$T(0) = T(0e + 0v) = 0T(e) + 0T(v) = 0$.

Ejemplo 1.2.
• La aplicación
$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (x + z + 2, y - z)$$
No es lineal pues $T(0,0,0) = (2,0) \neq (0,0)$
• La aplicación derivada sobre el espacio E de los polinomios en una variable, $E \xrightarrow{D} E$, es lineal : $D(\lambda p(x) + \mu q(x)) = \lambda p'(x) + \mu q'(x) = \lambda D(p(x)) + \mu D(q(x))$.
• La aplicación
$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (x + y, z^2)$$
No es lineal ya que $T(\lambda(x, y, z))$ no es igual $\lambda T(x, y, z)$ para todo valor de λ.
$T(\lambda(x, y, z)) = T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x + \lambda y, \lambda^2 z^2) \neq (\lambda x + \lambda y, \lambda z^2) = \lambda(x + y, z^2) = \lambda T(x, y, z)$.
La igualdad se da si $\lambda^2 = \lambda$, esto es, sólo para $\lambda = 0, 1$

1.1. Núcleo e imagen de una aplicación lineal.

Definición 1.3. Sea $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal, se definen su **núcleo**, $\ker T$, y su **imagen**, $\operatorname{Im} T$, por:
$$\ker T = \{e \in E : T(e) = 0\} \subseteq E$$
$$\operatorname{Im} T = \{e' \in E' : e' = T(e)\,,\ \text{para algún } e \in E\} \subseteq E'$$

Teorema 1.4. *Si $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal, $\ker T$ es un subespacio vectorial de E e $\operatorname{Im} T$ es un subespacio vectorial de E' y se verifica la fórmula de dimensión:*
$$\dim_k E = \dim_k \ker T + \dim_k \operatorname{Im} T$$

Demostración.
• $\ker T$ es cerrado por combinaciones lineales:
Si $e, v \in \ker T$ y $\lambda, \mu \in k$ se tiene que $T(\lambda e + \mu v) = \lambda T(e) + \mu T(v) = 0$, lo que prueba que $\lambda e + \mu v \in \ker T$.
• $\operatorname{Im} T$ es cerrado por combinaciones lineales:
Si $T(e), T(v) \in \operatorname{Im} T$ y $\lambda, \mu \in k$ se tiene que $\lambda T(e) + \mu T(v) = T(\lambda e + \mu v)$, lo que prueba que $\lambda e + \mu v \in \operatorname{Im} T$.

• Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de $\ker T$.
Ampliemos esta base para formar una base $\{v_1, \ldots, v_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ de E.
Tomando imágenes por T, los vectores $\{T(v_1), \ldots, T(v_m), T(e_{m+1}), \ldots, T(e_n)\}$ generan $\operatorname{Im} T$, y como $T(v_1) = \cdots = T(v_m) = 0$ por definición de núcleo, resulta que $\{T(e_{m+1}), \ldots, T(e_n)\}$ es un sistema de generadores de $\operatorname{Im} T$. Probaremos que $\{T(e_{m+1}), \ldots, T(e_n)\}$ son linealmente independientes con lo que quedará demostrada la fórmula.
Si $\lambda_{m+1}T(e_{m+1}) + \cdots + \lambda_n T(e_n) = 0$, por ser T lineal, $T(\lambda_{m+1}e_{m+1} + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$, por tanto el vector $\lambda_{m+1}e_{m+1} + \cdots + \lambda_n e_n$ pertenece a $\ker T$, luego $\lambda_{m+1}e_{m+1} + \cdots + \lambda_n e_n = 0$, ya que $\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ generan un suplementario de $\ker T$ y como además son linealmente independientes resulta que $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. □

Ejemplo 1.5. Sea E el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3. Calculemos el núcleo y la imagen de las siguientes aplicaciones lineales:

(a) Operador derivada: $E \xrightarrow{D} E$, definido por $D(p(x)) = p'(x)$.
(b) $E \xrightarrow{T} \mathbb{R}$, definida por $T(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)dx$

- $\ker D = \{p(x) \in E : p'(x) = 0\} = \{\text{polinomios constantes}\} = \langle 1 \rangle$.
  $\operatorname{Im} D = \langle 1, x, x^2 \rangle$, pues la derivada de un polinomio de grado menor o igual que tres es un polinomio de grado menor o igual que 2.
- $\operatorname{Im} T$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}$ y como $\operatorname{Im} T \neq (0)$, ha de ser $\operatorname{Im} T = \mathbb{R} = \langle 1 \rangle$, luego $\dim \ker T = \dim E - \dim \operatorname{Im} T = 4 - 1 = 3$.
  Calculemos una base del $\ker T$:
$$\int_{-1}^{1} (a + bx + cx^2 + dx^3)dx = ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^4}{4}\bigg]_{-1}^{1} = 2a + \frac{2}{3}c$$
  luego
$$\ker T = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in E : 2a + \frac{2}{3}c = 0\} = \{a + bx - 3ax^2 + dx^3 : a, b, d \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{a(1 - 3x^2) + bx + dx^3 : a, b, d \in \mathbb{R}\} = \langle 1 - 3x^2, x, x^3 \rangle$$

1.2. Aplicaciones lineales inyectivas, epiyectivas y biyectivas.

Definición 1.6. Sea $E \xrightarrow{T} E'$ una aplicación lineal. T es inyectiva o epiyectiva si como aplicación de conjuntos lo es, esto es:
• T es **inyectiva** si siempre que $T(e) = T(v)$ se deduce que $e = v$, cualesquiera que sean $e, v \in E$
• T es **epiyectiva** si $\operatorname{Im} T = E'$.

T es biyectiva si es a la vez inyectiva y epiyectiva. Las aplicaciones lineales biyectivas se llaman **isomorfismos**.
Un **endomorfismo** de E es una aplicación lineal de E en si mismo, $E \xrightarrow{T} E$. Se llaman **automorfismos** a los endomorfismos biyectivos.

Ejemplo 1.7.
• Sea V un subespacio vectorial de E, la inclusión natural
$$V \hookrightarrow E$$
$$v \mapsto v$$
es una aplicación lineal inyectiva.
• Si E representa el espacio vectorial de los polinomios, $p(x)$, de grado menor o igual que tres y E' el de los polinomios de grado menor o igual que dos, la aplicación derivada
$$E \xrightarrow{D} E'$$
$$p(x) \mapsto p'(x)$$

es una aplicación lineal epiyectiva.

• La aplicación identidad

$$E \xrightarrow{Id} E$$
$$e \mapsto e$$

es un automorfismo de E.

Proposición 1.8. *Una aplicación lineal* $E \xrightarrow{T} E'$ *es inyectiva si y sólo si* $\ker T = \{0\}$.

Demostración.

$\Rightarrow$ Si $e \in \ker T$ es $T(e) = 0$, luego $T(e) = T(0)$ pues $T(0) = 0$. Como T es inyectiva, de $T(e) = T(0)$ se deduce que $e = 0$.

$\Leftarrow$ Si $T(e) = T(e')$, por ser T lineal $T(e - e') = 0$, luego $e - e' \in \ker T$, y como $\ker T = \{0\}$ resulta que $e = e'$, lo que prueba que T es inyectiva. □

1.3. Operaciones con aplicaciones lineales: Suma, multiplicación por escalares, composición. Aplicación lineal inversa.

– Dadas aplicaciones lineales $E \xrightarrow{f} E'$ y $E \xrightarrow{g} E'$, las **aplicaciones suma** y **multiplicación por un escalar**, definidas repectivamente por

$$E \xrightarrow{f+g} E' \qquad\qquad E \xrightarrow{\lambda f} E'$$
$$e \mapsto f(e) + g(e) \qquad\qquad e \mapsto \lambda f(e)$$

son aplicaciones lineales, pues cualesquiera que sean $e, v \in E$ y $\alpha, \mu \in k$ se verifica $(f+g)(\alpha e + \mu v) = \alpha(f+g)(e) + \mu(f+g)(v)$ y $(\lambda f)(\alpha e + \mu v) = \alpha(\lambda f)(e) + \mu(\lambda f)(v)$, como es fácil comprobar.

El conjunto de las aplicaciones lineales de E en E' se representa por $\mathrm{Hom}_k(E, E')$ y es un k-espacio vectorial con las operaciones anteriores.

– La **composición** de aplicaciones lineales

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & E' \arrow[r, "g"] & E'' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & E' \arrow[d, "g"] \\ & E'' \end{tikzcd}$$

definida, para cada $e \in E$, por $(g \circ f)(e) = g(f(e))$, es una aplicación lineal:

$$(g\circ f)(\alpha e + \mu v) = g(f(\alpha e + \mu v)) = g(\alpha f(e) + \mu f(v)) = \alpha(g\circ f)(e) + \mu(g\circ f)(v),\ \forall e, v \in E, \alpha, \mu \in k\,.$$

–Una aplicación $E \xrightarrow{f} E'$ tiene **inversa** si existe otra aplicación $E' \xrightarrow{f^{-1}} E$ tal que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id\,.$$

Las aplicaciones biyectivas tienen aplicación inversa y, recíprocamente, cualquier aplicación que tiene inversa es biyectiva.

La inversa de una aplicación lineal es también una aplicación lineal.

Ejemplo 1.9. Sea T un endomorfismo del k-espacio vectorial E tal que $T^2 = T + I$. Probaremos que T es automorfismo y calcularemos T^{-1} en función de T.

De $T^2 = T + I$ se sigue $I = T^2 - T = T(T - I)$, lo que prueba que T tiene inversa y esta es $T^{-1} = T - I$ y por tanto es biyectiva.

2. Aplicaciones lineales en coordenadas: Matrices

2.1. Matriz asociada a una aplicación lineal.

Dada una aplicación lineal $E \xrightarrow{T} E'$ y bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E', existe una única matriz $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, k)$ determinada por

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i \,, \text{ para } j = 1, \dots, n$$

A es la *matriz asociada a T respecto de la las bases* $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E'.
Las columnas de A son las coordenadas de los vectores $T(e_1), \dots, T(e_n)$ respecto de la base $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E'.
Si $e = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ y $T(e) = x'_1e'_1 + \cdots + x'_me'_m$, la *expresión en coordenadas de T* es

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_m) \,, \text{ siendo } A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} \text{ la expresión matricial del}$$

sistema lineal que T define.
Obsérvese que:
• A es la matriz de coeficientes del sistema lineal anterior y $\ker T$ es el subespacio de soluciones del sistema homogéneo asociado.
• Los vectores $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ forman un sistema de generadores del subespacio imagen, $\operatorname{Im} T$, luego su dimensión coincide con el rango de la matriz A y por tanto la dimensión del núcleo es la de E menos el rango de A

$$\dim_k \operatorname{Im} T = \operatorname{rg} A \;, \quad \dim_k \ker T = \dim_k E - \operatorname{rg} A$$

Ejemplo 2.1. Dada la aplicación lineal

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^4$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - y, x + 2z, y, y + z)$$

calculemos su matriz asociada y probemos que T es inyectiva.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \,, \quad \operatorname{rg} A = 3 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \ker T = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \ker_{\mathbb{R}} T = \{0\}$$

Ejemplo 2.2. Sean $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $\{e'_1e'_2, e'_3, e'_4\}$ una base de E' y $k = \mathbb{R}$. Considérense la aplicación lineal $E \xrightarrow{T} E'$ definida por

$$T(e_1) = e'_1 + e'_2 - e'_3 \,, \; T(e_2) = 2e'_2 - e'_4 \,, \; T(e_3) = 3e'_1 + 3e'_2 - 3e'_3$$

calculemos su expresión en coordenadas y bases y dimensiones de $\operatorname{Im} T$ y $\ker T$.

La matriz asociada a T, por columnas, es $A = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = \operatorname{rg} A = 2 \,, \quad \operatorname{Im} T = \langle T(e_1), T(e_2) \rangle = \langle e'_1 + e'_2 - e'3, 2e'_1 - e'_4 \rangle$$
$$\dim_{\mathbb{R}} \ker T = \dim_{\mathbb{R}} E - \operatorname{rg} A = 1$$
$$\ker T \equiv \begin{cases} x + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$
$$\ker T = \{(-3z, 0, z), z \in \mathbb{R}\} = \langle (-3, 0, 1) \rangle = \langle -3e_1 + e_3 \rangle$$

2.2. Matrices asociadas a la suma de aplicaciones lineales y al producto de una aplicación lineal por un escalar.

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ las matrices asociadas a las aplicaciones lineales $E \xrightarrow{f} E'$ y $E \xrightarrow{g} E'$ respecto de la las bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E'.

• La matriz asociada a la aplicación lineal suma $f+g$ es la matriz $A+B$. En efecto:

$$(f+g)(e_j) = f(e_j) + g(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij}e'_i = \sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})e'_i$$

• La matriz asociada a la aplicación lineal λf es la matriz λA. En efecto:

$$(\lambda f)(e_j) = \lambda f(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda a_{ij}e'_i$$

2.3. Matriz asociada a la composición de aplicaciones lineales.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & E' \arrow[r, "g"] & E'' \end{tikzcd}$$

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz asociada a f respecto de la las bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E' y sea $B = (b_{ij})$ la matriz asociada a g respecto de la las bases $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E' y $\{e''_1, \dots, e''_s\}$ de E'', esto es:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i\,, \text{ para } j = 1, \dots, n\,; \quad g(e'_i) = \sum_{k=1}^{s} b_{ki}e''_k\,, \text{ para } i = 1, \dots, m$$

La matriz asociada a $g \circ f$ respecto de las bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{e''_1, \dots, e''_s\}$ de E'' es la matriz producto $B \cdot A$. En efecto:

$$(g\circ f)(e_j) = g(f(e_j)) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}g(e'_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\sum_{k=1}^{s} b_{ki}e''_k = \sum_{k=1}^{s}(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij})e''_k = \sum_{k=1}^{s}(B\cdot A)_{kj}e''_k$$

Ejemplo 2.3. Dadas las aplicaciones lineales

$$\begin{array}{cc} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x-y, y+2z) & (x,y) \mapsto (x+y, 2y, x-y) \end{array}$$

Calculemos las matrices asociadas a $f \circ g$ y $g \circ f$ y la dimensión y una base del subespacio $\mathrm{Im}(f\circ g)$ de $\mathbb{R}^2$ y del subespacio $\mathrm{Im}(g\circ f)$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Cambios de base

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E, que llamaremos *base inicial o antigua*, y $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ otra base de E, a la que nos referiremos como *base nueva*. Los vectores $\bar{e}_j$ de la base nueva expresados como combinación lineal de los de la base antigua, $\bar{e}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}e_i$, definen la matriz $B = (b_{ij})$ que expresa el cambio de base en el espacio vectorial E.

La *matriz de cambio de base* $B = (b_{ij})$ es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base nueva en función de los de la antigua.

La *aplicación lineal que realiza el cambio de base de matriz* B es la aplicación identidad respecto de las bases $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$.

$$\langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\rangle = E \xrightarrow{Id_B} E = \langle e_1, \dots, e_n\rangle\,, \quad Id_B(\bar{e}_j) = \bar{e}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}e_i\,,$$

cuya expresión en coordenadas es $B\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \vdots\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, siendo $e=\bar{x}_1\bar{e}_1+\cdots+\bar{x}_n\bar{e}_n$ y $e=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ las expresiones en coordenadas del vector e respecto de la base nueva y respecto de la base antigua, coordenadas nuevas $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ y coordenadas antiguas $(x_1,\ldots,x_n)$. Se obtiene así:

3.1. Fórmula del cambio de base para vectores.

$$\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \vdots\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.1. Comprobemos que los polinomios $\{x-1,2-3x^2,x-x^3,x^3+x^2-1\}$ forman una nueva base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3, $E=\langle 1,x,x^2,x^3\rangle$. Y calculemos la expresión del polinomio $p(x)=3-x+x^2$ en función de esa nueva base.

• $\det(x-1,2-3x^2,x-x^3,x^3+x^2-1)=\begin{vmatrix}-1&2&0&-1\\1&0&1&0\\0&-3&0&1\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$

Lo que prueba que $\{x-1,2-3x^2,x-x^3,x^3+x^2-1\}$ es una base de E (base nueva), y la matriz de cambio de base respecto de la base inicial $\{1,x,x^2,x^3\}$ es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los polinomios $\{x-1,2-3x^2,x-x^3,x^3+x^2-1\}$ respecto de la base $\{1,x,x^2,x^3\}$:

$$B=\begin{pmatrix}-1&2&0&-1\\1&0&1&0\\0&-3&0&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

• Si (a,b,c,d) son las coordenadas del polinomio $p(x)$ en la base nueva, como sus coordenadas iniciales son $(3,-1,1,0)$, se tiene:

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\\4\\4\end{pmatrix}$$

Es decir la expresión de $p(x)$ en la nueva base es:

$$p(x)=-5(x-1)+(2-3x^2)+4(x-x^3)+4(x^3+x^2-1)$$

3.2. Cambio de base para aplicaciones lineales.

Sea A la matriz asociada a la aplicación lineal $E\xrightarrow{T}E'$ respecto de las bases $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de E y $\{e'_1,\ldots,e'_m\}$ de E'. Efectuemos cambios de base en E y en E' de matrices respectivas B y B';

$$\langle\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\rangle=E\xrightarrow{Id_B}E=\langle e_1,\ldots,e_n\rangle$$

$$\langle\bar{e}'_1,\ldots,\bar{e}'_m\rangle=E\xrightarrow{Id_B}E=\langle e'_1,\ldots,e'_m\rangle$$

Si $\bar{A}$ es la matriz de T respecto de las nuevas bases $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$ y $\{\bar{e}'_1,\ldots,\bar{e}'_m\}$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo, del que se deduce la fórmula de cambio de base

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T_A"] & E' \\ E \arrow[u, "Id_B"] \arrow[r, "T_{\bar{A}}"] & E' \arrow[u, "Id_{B'}"'] \end{tikzcd} \qquad T_{\bar{A}}=Id_{B'}^{-1}\circ T_A\circ Id_B\Rightarrow \bar{A}=B'^{-1}\cdot A\cdot B$$

Es fácil deducir las correspondientes fórmulas cuando sólo se cambia la base de E, $\bar{A} = A \cdot B$, o sólo la de E', $\bar{A} = B'^{-1} \cdot A$.
En particular, si $E \xrightarrow{T} E$ un endomorfismo de E, A su matriz asociada respecto de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E y $\bar{A}$ es la matriz de T respecto de la nueva base $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$, se tiene:

Fórmula de cambio de base para endomorfismos: $\bar{A} = B^{-1} \cdot A \cdot B$

Ejemplo 3.2. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $E \xrightarrow{T} E$ el endomorfismo de E definido por:

$$T(e_1) = e_1 + 2e_2 - e_3, T(e_2) = 2e_1 - e_3, e_3 + e_2 \in \ker T$$

(a) Averigemos si $\operatorname{Im} T$ y $\ker T$ son subespacios suplementarios. De $e_3 + e_2 \in \ker T$ se deduce que $T(e_3) = -T(e_2)$, luego la matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, y se tiene:

$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = \operatorname{rg} A = 2$ y $\{T(e_1) = (1, 2, -1), T(e_2) = (2, 0, -1)\}$ es una base de $\operatorname{Im} T$.
$\dim_{\mathbb{R}} \ker T = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T = 1$ y $\{e_3 + e_2 = (0, 1, 1)\}$ es una base de $\ker T$.

Los vectores $\{(1, 2, -1), (2, 0, -1), (0, 1, 1)\}$ forman una base de E pues su determinante es no nulo, luego $\operatorname{Im} T$ y $\ker T$ son subespacios suplementarios.

(b) Calculemos la matriz $\bar{A}$ de T respecto de la base $\{2e_1 + e_2, e_2 - e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$. La matriz del cambio de base es $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, luego

$$\bar{A} = B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -6 & -4 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

(c) Sea $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ una base del espacio vectorial E' y $E \xrightarrow{T'} E'$ la aplicación lineal definida por

$$T(e_1) = e'_1 + e_2, T(e_2) = e'_1 - e'_2, T(e_3) = e'_2 + e'_3$$

Calculemos la matriz asociada a la composición $T' \circ T$ respecto de las bases $\{2e_1 + e_2, e_2 - e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$ de E y $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de E'.
Las matrices A' de T' y C de $T' \circ T$ respecto de las bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ de E y $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de E' son

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = A' \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz $\bar{C}$ de $T' \circ T$ respecto de las bases $\{2e_1 + e_2, e_2 - e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$ de E y $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de E', viene dada por:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "(T'\circ T)_C"] & E' \\ E \arrow[u, "Id_B"] \arrow[ur, "(T'\circ T)_{\bar{C}}"'] & \end{tikzcd} \qquad \bar{C} = C \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Problemas resueltos

1. Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x,y,z) = (x+y, x+z, x-y+2z)$$

(a) Calcular la dimensión y una base de los subespacios $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.
(b) ¿Se verifica que $\mathbb{R}^3 = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$? En caso afirmativo, calcular las coordenadas del vector $(1,2,3)$ en la nueva base que la identificación anterior define.
(c) Determinar λ para que la imagen del vector $e = (\lambda, 1, 0)$ pertenezca al subespacio generado por $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$.

Solución. Las ecuaciones del endomorfismo y su matriz asociada respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ son, respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= \bar{x} \\ x+z &= \bar{y} \\ x-y+2z &= \bar{z} \end{aligned}\right\} \qquad A = (T(e_1), T(e_2), T(e_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $T(e_3) = T(e_1) - T(e_2)$ es $\operatorname{rg} A = 2$.
(a) $\dim(\operatorname{Im} T) = \operatorname{rg} A = 2$ e $\operatorname{Im} T = \langle T(e_1), T(e_2) \rangle$.

$$\begin{aligned} &\dim(\ker T) = 3 - \operatorname{rg} A = 1 \\ &\ker T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = 0, x+z = 0\} = \langle (1,-1,-1) \rangle \end{aligned}$$

(b) $\ker T$ es un subespacio suplementario de $\operatorname{Im} T$ pues

$$\det(T(e_1), T(e_2), \bar{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0\,.$$

Si escribimos $\bar{e}_1 = T(e_1)$, $\bar{e}_2 = T(e_2)$, $\bar{e}_3 = \bar{e}_3$, la matriz B del cambio de base es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y las coordenadas del vector $(1,2,3)$ en la nueva base son:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $(\lambda+1, \lambda, \lambda-1) = T(e) \in \langle e_1, e_2 \rangle$ precisamente si $\operatorname{rg}(T(e), e_1, e_2) = 2$, es decir, si:

$$0 = \det(T(e), e_1, e_2) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ \lambda-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda - 1 \implies \lambda = 1\,.$$

2. Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\xrightarrow{T} \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto (x+3y-2z, y-z) \end{aligned}$$

en las bases $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{\bar{u}_1 = (1,-1), \bar{u}_2 = (1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Solución. La aplicación T viene dada en coordenadas, por tanto referida a dos bases prefijadas $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. La matriz de T en estas bases es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ en la base $\{u_1, u_2\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz pedida es la matriz $\bar{A}$ asociada a T en las bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ y $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$. De modo que, si $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ es la matriz del cambio de base en $\mathbb{R}^2$, del diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "T_A"] \arrow[dr, "T_{\bar{A}}"'] & \mathbb{R}^2 \\ & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "Id_B"'] \end{tikzcd}$$

resulta $B \cdot \bar{A} = A$, luego:

$$\bar{A} = B^{-1} \cdot A = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

3. Sea E el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor que 3. Se define una aplicación $E \xrightarrow{T} E$ por:

$$T(p(x)) = p(0) + p'(0)(x-1) + p''(0)(x-1)^2$$

(a) Probar que T es lineal y calcular su matriz en la base $\{1, x, x^2\}$ de E.
(b) Es T un isomorfismo?. Razónese la respuesta.

Solución.
(a) T es lineal, en efecto:

$$\begin{aligned} T(\lambda p + \mu q) &= (\lambda p + \mu q)(0) + (\lambda p + \mu q)'(0)(x-1) + (\lambda p + \mu q)''(0)(x-1)^2 \\ &= \lambda p(0) + \mu q(0) + \lambda p'(0)(x-1) \\ &\quad + \mu q'(0)(x-1) + \lambda p''(0)(x-1)^2 + \mu q''(0)(x-1)^2 \\ &= \lambda T(p) + \mu T(q). \end{aligned}$$

Por otra parte, la matriz de T en la base $\{1, x, x^2\}$ tiene por columnas las coordenadas en esta base de los vectores $T(1) = 1$, $T(x) = x - 1$, $T(x^2) = 2(x-1)^2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Como $\operatorname{rg} A = 3$, pues $\det(A) \neq 0$, se tiene que $\dim \operatorname{Im} T = 3 = \dim_{\mathbb{R}} E$, luego T es epiyectiva. De la fórmula de la dimensión $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} \ker T + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T$ se sigue que $\ker T = \{0\}$ y en consecuencia T también es inyectiva.

4. Hallar las ecuaciones de la tranformación lineal T de $\mathbb{R}^3$ tal que:

(a) La restricción de T al plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ es una homotecia de razón 3.
(b) T deja invariante la recta r

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(c) $T(0, 0, -1) = (10, -5, -3)$

Solución. El plano π y la recta r son subespacios suplementarios, pues $\pi \cap r = \{0\}$ ya que el sistema lineal determinado por sus ecuaciones tiene determinante no nulo. Por tanto, si elegimos como base (nueva) en $\mathbb{R}^3$ $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, siendo $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = \pi$ y $\langle \bar{e}_3 \rangle = r$ bases respectivas de π y r, la matriz asociada a T en esta base es:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

pues por la condicin (a) es $T(\bar{e}_1) = 3\bar{e}_1$, $T(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_2$ y de la condicin (b) se deduce que $T(\bar{e}_3) = \lambda \bar{e}_3$ para algn $\lambda \in \mathbb{R}$.
Calculemos bases de π y r:

$$\pi = \langle \bar{e}_1 = (1,0,-1), \bar{e}_2 = (0,1,-1) \rangle ; \quad r = \langle \bar{e}_3 = (-2,1,0) \rangle .$$

Por ltimo, el λ de la matriz $\bar{A}$ se determina imponiendo la condicin (c), pero para ello hay que efectuar previamente un cambio de base. Si A es la matriz de T en la base antigua y B es la matriz del cambio de base es:

$$\begin{aligned} A = B \cdot \bar{A} \cdot B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3+2\lambda & -6+2\lambda & -6+2\lambda \\ 3-\lambda & 6-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y aplicando(c)

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{resulta } \lambda = -2 .$$

Y las ecuaciones de T son:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} -7x - 10y - 10z &= \bar{x} \\ 5x + 8y + 5z &= \bar{y} \\ 3z &= \bar{z} \end{aligned}$$

5. Problemas propuestos

1. Sea $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por:

$$f(x,y,z) = (x - y + z, x + y - z)$$

Probar que es una aplicación lineal y calcular bases y dimensión del núcleo y la imagen. ¿Es epiyectiva?

2. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por:

$$T(x,y,z) = (y - z, -x + 4z, y + z)$$

Probar que es una aplicación lineal. Hallar el núcleo y la imagen. ¿Es un isomorfismo?

3. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor que 4. Se define la aplicación $T\colon E \to E$ por $T(p(x)) = (x-1)p'(x)$, siendo $p'(x)$ la derivada del polinomio $p(x)$.

(a) Demostrar que T es lineal. Calcular su núcleo y su imagen.
(b) Calcular los polinomios $p(x)$ tales que $T(p(x)) = p(x)$.

4. Sea $T \in End_k(E)$. Pruébese que el conjunto S de vectores que permanecen invariantes forman un subespacio vectorial.

5. Sobre el espacio vectorial E de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales, se considera la aplicación $T\colon E \to E$ definida por:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a-3b & 6a-4b \\ -a+\frac{9}{2}b+3c-2d & 6a-3b-d \end{pmatrix}$$

Probar que T es lineal y calcular su núcleo y su imagen.

6. Sea $f \in End_k(E)$ tal que $f^2 = Id$. Pruébese que los subconjuntos E^+ y E^- de E definidos por $E^+ = \{x \in E\colon f(x) = x\}$, $E^- = \{x \in E\colon f(x) = -x\}$ son subespacios de E y se verifica $E = E^+ \oplus E^-$.
Utilícese lo anterior para demostrar que toda función real de variable real es suma, de manera única, de una función par más una impar.

7. Sea T un endomorfismo idempotente, $T^2 = T$, del espacio vectorial E. Pruébese que la imagen de T está formada por los vectores invariantes por T y conclúyase que

$$E = \ker T \oplus Im\, T$$

8. Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+3y-2z, y-z) \end{array}$$

en las bases $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{(1,-1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

9. Para cada número real θ, sea $\tau_\theta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por la fórmula:

$$\tau_\theta(x,y,z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$$

(a) Pruébese que τ_θ es un automorfismo del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y hállese su matriz en la base estándar del espacio.
(b) Interprétese geométricamente la aplicación τ_θ y calcúlense sus subespacios invariantes.

10. Considérese la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (2x+y, -z, 0)$. Calcular su matriz y a partir de ella:

(a) Determinar $\ker f$ y hallar una base de dicho subespacio.
(b) Hallar $Im\, f$ y el rango de f.
(c) ¿Pertenece $(6,-2,0)$ al $\ker f$?.

11. Sea E el espacio vectorial de las matrices reales de la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ con $a+b+c=0$. Calcular una base de E y respecto de la misma calcular la matriz del endomorfismo $T\colon E \to E$ definido por:

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a-2b \\ 2b-3c & 3c-a \end{pmatrix}$$

Deducir de lo anterior bases de $\ker T$ e $Im\, T$.

12. Hallar la matriz de una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por las condiciones:

(a) $f(1,0,0)$ es proporcional a $(0,0,1)$.
(b) $f^2 = f$.
(c) $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x+z=0\}$.

¿Es f única?.

13. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo $T(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$. Se pide:

(a) Calcular la matriz de T en la base ordinaria.
(b) Calcular la matriz de T en la base $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (-1,0,0)$.
(c) Hallar una base de $\ker T$, $Im\, T$, precisando sus dimensiones.
(d) Calcular una base de $\ker T^2$. ¿Coincide este núcleo con el de T?. Razónese la respuesta.

14. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y, z - y)$$

(a) Calcular la matriz asociada a T y con ella encontrar $\ker T$, $Im\, T$, $\ker T^2$ e $Im\, T^2$.
(b) Hallar bases de dichos subespacios vectoriales.

15. Sea E un espacio vectorial de dimensión 3 y $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del mismo. Un endomorfismo T de E verifica que:

$$T(e_1) = e_1 + e_2,\ T(e_3) = e_3,\ \ker T =< e_1 + e_2 >$$

Deducir la matriz de T y calcular $Im\, T$, $\ker T^2$ y $\ker T^3$.

16. Sea T una aplicación lineal y sean V y V' subespacios vectoriales de E y E' respectivamente. Demostrar que

(a) *Imagen de* $V = \{e' \in E' : e' = T(v)$ para algún $v \in V\}$ es un subespacio vectorial de E', el *subespacio imagen de* V *por la aplicación* T, que representaremos por $T(V)$.
(b) *Antiimagen de* $V' = \{e \in E : T(e) \in V'\}$ es un subespacio vectorial de E, el *subespacio antiimagen de* V' *por la aplicación* T, que representaremos por $T^{-1}(V)$.
(Observa que $T(E) = \mathrm{Im}\, T$ y $T^{-1}(0) = \ker T$)

17. Sea E el espacio vectorial de los polinomios $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual que 4. Se define $f\colon E \to E$, $T(p(x)) = p'(x)$.

(a) Probar que T es una aplicación lineal.
(b) Calcular $T^{-1}(3x^2 - 1)$.
(c) Calcular bases y dimensin de $\ker T$ e $\mathrm{Im}\, T$.

18. Calcular la matriz de la aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ y cuyo núcleo está generado por los vectores $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 3)$.

19. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4 y $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base del mismo. Dado el endomorfismo T de E definido por:

$$T(e_1) = e_1 - e_2,\ T(e_2) = e_2 - e_3 + e_4,\ T(e_3) = e_1 - e_3 + e_4,\ e_1 + e_4 \in \ker T$$

Calcular la matriz de T y deducir bases de $\ker T$ e $Im\, T$. ¿Se verifica que $E = \ker T \oplus Im\, T$?.

20. Sea $E =< x, \sin x, \cos x >$. Calcular la matriz del endomorfismo $T\colon E \to E$ definido por

$$T(f(x)) = f(0)x + f'(0)\sin x + f''(0)\cos x$$

en una base de E. Decidir si T es isomorfismo.

21. Dado el endomorfismo $T\colon E_3 \to E_3$ cuya matriz es $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, demostrar que para cualquier valor de λ la dimensión del subespacio imagen es 2. Hallar el núcleo y la imagen para $\lambda = -2$.

22. Considérese el endomorfismo T de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = ((m - 2)x + 2y - z, 2x + my + 2z, 2mx + 2(m - 1)y + (m + 1)z)$$

A partir de su matriz, demuéstrese que la dimensión del núcleo es 0 excepto para valores particulares de m. Para dichos valores, estudiar T.

23. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base del espacio vectorial E.

(a) Probar que los vectores $u_1' = 2u_1 - u_2 + u_3,\ u_2' = u_1 + u_3,\ u_3' = 3u_1 - u_2 + 3u_3$ forman una base de E.
(b) Calcular las coordenadas del vector $u = u_1 - 4u_3$ en la base de (a).
(c) Hallar las coordenadas respecto de la base inicial del vector $v = -2u_1' + 3u_2' + u_3'$.

24. Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz de T en la base $\{e_1', e_2', e_3'\}$ siendo:

$$e_1 = e_1',\ e_2 = \frac{1}{2}e_2',\ e_3 = e_3' + e_1' - \frac{1}{2}e_2'$$