VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

SEMINARIO III.

# 2. Aplicaciones lineales

## 2.1. Ejemplos y tipos de aplicaciones lineales.

17. Estudia cuales de las siguientes aplicaciones son lineales:
    a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x+y, \frac{1}{2}x - y)$.
    b) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (-x+4y, x-2y, x^2+y^2)$.
    c) $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2, 0, x_2+x_3)$.
    d) $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$, $T(a+bx+cx^2) = (-a+b, 2a+3b-\sqrt{2}c)$.
    e) $T\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$,
    $$T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = a_{21} + a_{22} + (2a_{11} - a_{21})x + (a_{12} + 3a_{22})x^2.$$
    f) $T\colon \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$, $T(p(x)) = xp'(x)$.
    g) $\det\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\det(A) = ad - bc$ donde $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.
    h) $tr : \mathrm{Mat}_{n\times n}(k) \to k$, $tr(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ donde $A = (a_{ij})$.
18. En $\mathbb{R}_3[x]$ sea la aplicación $T\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por $T\big(p(x)\big) = (x-3)p'(x)$. Prueba que $T$ es una aplicación lineal.

## 2.2. Núcleo e imagen de una aplicación lineal.

19. Sea $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por:
    $$f(x,y,z) = (x-y+z, x+y-z)$$
    Probar que es una aplicación lineal y calcular bases y dimensión del núcleo y la imagen. ¿Es epiyectiva?

20. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por:
    $$T(x,y,z) = (y-z, -x+4z, y+z)$$
    Probar que es una aplicación lineal. Hallar el núcleo y la imagen. ¿Es un isomorfismo?

21. Sea la aplicación $T : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por:
    $$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+2c+d, a+3b+5c-7d, a-b+c-d)\,.$$
    Prueba que $T$ es lineal. Calcula su núcleo e imagen.
22. Sobre el espacio vectorial $E$ de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales, se considera la aplicación $T\colon E \to E$ definida por:
    $$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a-3b & 6a-4b \\ -a+\frac{9}{2}b+3c-2d & 6a-3b-d \end{pmatrix}$$
    Probar que $T$ es lineal y calcular su núcleo y su imagen.

ALGUNAS SOLUCIONES. SEMINARIO III.

18. En $\mathbb{R}_3[x]$ sea la aplicación $T\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por $T\big(p(x)\big) = (x-3)p'(x)$. Prueba que $T$ es una aplicación lineal.

SOLUCIÓN: Por definición, $T$ es una aplicación lineal si verifica:
$$T\big(\lambda p(x) + \mu q(x)\big) = \lambda T\big(p(x)\big) + \mu T\big(q(x)\big) \quad \forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}_3[x], \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
Si denotamos $h(x) = \lambda p(x) + \mu q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ ($\mathbb{R}_3[x]$ es $\mathbb{R}$-espacio vectorial) se tiene que $h'(x) = \lambda p'(x) + \mu q'(x)$ y por lo tanto:
$$\begin{aligned} T\big(\lambda p(x) + \mu q(x)\big) &= T\big(h(x)\big) \overset{def.\,T}{=} (x-3)h'(x) = (x-3)\big(\lambda p'(x) + \mu q'(x)\big) = \\ &= \lambda(x-3)p'(x) + \mu(x-3)q'(x) \overset{def.\,T}{=} \lambda T\big(p(x)\big) + \mu T\big(q(x)\big) \end{aligned}$$

20. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por:
$$T(x,y,z) = (y-z, -x+4z, y+z)$$
Probar que es una aplicación lineal. Hallar el núcleo y la imagen. ¿Es un isomorfismo?

SOLUCIÓN: $T$ es lineal si:
$$T\big(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')\big) = \lambda T(x,y,z) + \mu T(x',y',z') \quad \forall (x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
Por definición de suma de vectores y producto por escalares en $\mathbb{R}^3$ (es $\mathbb{R}$-espacio vectorial):
$$\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$
Luego:
$$\begin{aligned} T\big(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')\big) &= T(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \overset{def.\,T}{=} \\ &= \big((\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z'), -(\lambda x + \mu x') + 4(\lambda z + \mu z'), (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z')\big) = \\ &= \big(\lambda(y-z) + \mu(y'-z'), \lambda(-x+4z) + \mu(-x'+4z'), \lambda(y+z) + \mu(y'+z')\big) = \\ &= \lambda(y-z, -x+4z, y+z) + \mu(y'-z', -x'+4z', y'+z') \overset{def.\,T}{=} \\ &= \lambda T(x,y,z) + \mu T(x',y',z'). \end{aligned}$$

Para calcular el núcleo y la imagen de $T$ calcularemos primero la matriz asociada a $T$ en la base canónica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Por definición, las columnas de la matriz son las imágenes de los 3 vectores $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Y como:
$$T(1,0,0) = (0,-1,0)\,, T(0,1,0) = (1,0,1)\,, T(0,0,1) = (-1,4,1)\,,$$
la matriz asociada a $T$ en la base canónica es:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Se tiene que el rango de $A$ es la dimensión de la Imagen de $T$, y como $|A| = 2 \neq 0$:
$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\ T = \mathrm{rg}(A) = 3$$
y una base de Im $T$ está formada por los vectores $\{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\}$. Luego en particular $T$ es epiyectiva. Por la fórmula de la dimensión:
$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker} T + \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\ T$$
se sigue que $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker} T = 0$ y por tanto $\mathrm{Ker} T = \{0\}$. En particular $T$ es inyectiva y en consecuencia es un isomorfismo.