VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

SEMINARIO IV.

2.3. Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambios de base.

23. Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+3y-2z,y-z) \end{array}$$

en las bases $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{(1,-1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

24. Considérese la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (2x+y,-z,0)$. Calcular su matriz y a partir de ella:
    a) Determinar $\ker f$ y hallar una base de dicho subespacio.
    b) Hallar $Im\, f$ y el rango de f.
    c) ¿Pertenece $(6,-2,0)$ al $\ker f$?.

25. Sea E un espacio vectorial de dimensión 3 y $\{e_1,e_2,e_3\}$ una base del mismo. Un endomorfismo T de E verifica que:

$$T(e_1) = e_1 + e_2,\ T(e_3) = e_3,\ \ker T =< e_1 + e_2 >$$

Deducir la matriz de T y calcular $Im\, T$, $\ker T^2$ y $\ker T^3$.

26. Calcular la matriz de la aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,0) = (0,1,0)$ y cuyo núcleo está generado por los vectores $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(2,1,3)$.

27. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la aplicación lineal $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-z & z-x \\ x+2y-z & 2x+y \end{pmatrix}$. Se pide:
    a) Calcula la matriz de T en las bases usuales.
    b) Sean las bases $C = \{(0,1,1),(1,0,1),(-1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $C' = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(k)$. Calcula la matriz de T en estas bases.

28. Sea $B = \{u_1,u_2,u_3\}$ una base del espacio vectorial E.
    a) Probar que los vectores $u_1' = 2u_1 - u_2 + u_3$, $u_2' = u_1 + u_3$, $u_3' = 3u_1 - u_2 + 3u_3$ forman una base de E.
    b) Calcular las coordenadas del vector $u = u_1 - 4u_3$ en la base de (a).
    c) Hallar las coordenadas respecto de la base inicial del vector $v = -2u_1' + 3u_2' + u_3'$.

29. Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base $\{e_1,e_2,e_3\}$ es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz de T en la base $\{e_1',e_2',e_3'\}$ siendo:

$$e_1 = e_1',\ e_2 = \frac{1}{2}e_2',\ e_3 = e_3' + e_1' - \frac{1}{2}e_2'$$

30. Considera la aplicación:

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ \quad p(x) \mapsto p(-1) + p(1)(x-1) + p(0)(x-1)^2 \end{array}$$

    a) Demuestra que f es lineal.
    b) Da la matriz de f asociada a la base estándar $\{1,x,x^2\}$.
    c) Da la matriz de f asociada a la base $B' = \{-1,(x-1),(x-1)^2\}$.
    d) Da las coordenadas en la base B' del vector $f\big((2,1,1)_{B'}\big)$.

ALGUNAS SOLUCIONES. SEMINARIO IV.

24. Considérese la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (2x+y,-z,0)$. Calcular su matriz y a partir de ella:
   a) Determinar $\ker f$ y hallar una base de dicho subespacio.
   b) Hallar $Im\, f$ y el rango de f.
   c) ¿Pertenece $(6,-2,0)$ al $\ker f$?.

   Solución: Sea $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. La matriz asociada a f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es aquella cuyas columnas son las imágenes de los vetores $\{e_1, e_2, e_3\}$, y como:
$$f(e_1) = (2,0,0)\,, \quad f(e_2) = (1,0,0)\,, \quad f(e_3) = (0,-1,0)$$
   la matriz es:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   a) Calculemos una base de Ker$f$.
$$\begin{aligned}\mathrm{Ker} f &:= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0)\} \overset{def.\,f}{=} \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (2x+y,-z,0) = (0,0,0)\} = \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y=0,\ z=0\} = \{(x,-2x,0) \mid x\in\mathbb{R}\} = \langle(1,-2,0)\rangle\end{aligned}$$
   b) Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ se tiene que $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\ f = \mathrm{rg}(A) = 2$ y una base es:
$$\mathrm{Im}\ f = \langle f(e_2), f(e_3)\rangle$$
   c) El vector $(6,-2,0)$ no pertence al núcleo pues $f(6,-2,0) = (10,0,0) \neq (0,0,0)$.

30. Considera la aplicación:
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ p(x) &\mapsto p(-1) + p(1)(x-1) + p(0)(x-1)^2 \end{aligned}$$
   a) Demuestra que f es lineal.
   b) Da la matriz de f asociada a la base estándar $\{1, x, x^2\}$.
   c) Da la matriz de f asociada a la base $B' = \{-1, (x-1), (x-1)^2\}$.
   d) Da las coordenadas en la base B' del vector $f\big((2,1,1)_{B'}\big)$.

   Solución:
   a) Demostraremos que es lineal por partes. Veamos primero que:
$$f\big(\lambda p(x)\big) = \lambda f\big(p(x)\big) \quad \forall p(x) \in \mathbb{R}_2[x]\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$
   En efecto:
$$\begin{aligned} f\big(\lambda p(x)\big) &= \lambda p(-1) + \lambda p(1)(x-1) + \lambda p(0)(x-1)^2 = \\ &= \lambda\big(p(-1) + p(1)(x-1) + p(0)(x-1)^2\big) = \lambda f\big(p(x)\big). \end{aligned}$$
   Comprobemos ahora que:
$$f\big(p(x)+q(x)\big) = f\big(p(x)\big) + f\big(q(x)\big) \quad \forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x], \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
$$\begin{aligned} f\big(p(x)+q(x)\big) &= p(-1) + q(-1) + \big(p(1)+q(1)\big)(x-1) + \big(p(0)+q(0)\big)(x-1)^2 = \\ &= p(-1) + p(1)(x-1) + p(0)(x-1)^2 + q(-1) + q(1)(x-1) + q(0)(x-1)^2 = \\ &= f\big(p(x)\big) + f\big(q(x)\big). \end{aligned}$$
   Luego f es lineal.
   b) Las columnas de la matriz A asociada a f son las imágenes de $\{1, x, x^2\}$.
$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + 1\cdot(x-1) + 1\cdot(x-1)^2 = 1 - x + x^2 \equiv (1,-1,1) \\ f(x) &= -1 + 1\cdot(x-1) + 0\cdot(x-1)^2 = -2 + x \equiv (-2,1,0) \\ f(x^2) &= 1 + 1\cdot(x-1) + 0\cdot(x-1)^2 = x \equiv (0,1,0) \end{aligned}$$

Es decir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3_{\{1,x,x^2\}} \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3_{\{1,x,x^2\}} \arrow[d, "C^{-1}"] \\ \mathbb{R}^3_{B'} \arrow[u, "C"] \arrow[r, "A'"] & \mathbb{R}^3_{B'} \end{tikzcd}$$

donde $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de la base nueva:

$$B' = \{-1, (x-1), (x-1)^2\} = \{(-1,0,0), (-1,1,0), (1,-2,1)\}$$

a la base antigua $\{1, x, x^2\}$. Su inversa vale $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz de f en la base B' es:

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Las coordenadas en la base B' del vector $f\big((2,1,1)_{B'}\big)$ son:

$$f\big((2,1,1)_{B'}\big) = A' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$