VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

Álgebra lineal y Geometría I
Gloria Serrano Sotelo
Departamento de MATEMÁTICAS

Aplicaciones lineales. Matrices. Sistemas lineales. Cambios de base

1. La matriz asociada a la aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x + 2y, z + y, x - z)$$

respecto de la base usual en $\mathbb{R}^3$ es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo cuya matriz asociada respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

a) f es inyectiva. ; **b)** f es epiyectiva. ; **c)** f no es inyectiva y la dimensión de $\ker f$ es 1.

3. Sea λ un parámetro real y considérese el endomorfismo

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x - y, \lambda x + y - z, 2x + 2y - z)$$

T es un isomorfismo sólo si:

a) $\lambda = 3$; **b)** $\lambda \neq 3$; **c)** Para cualquier valor de λ.

4. Sea la aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (y - z, -x + 4z, y - z)$$

Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) $\dim \operatorname{Im} T = 2$, $\dim \ker T = 1$

b) $\operatorname{Im} T = \langle (0, -1, 0), (1, 0, 1) \rangle$, $\ker T = \langle (1, 1, 1) \rangle$

c) $\operatorname{Im} T = \langle (-1, 4, -1), (1, 0, 1) \rangle$, $\ker T = \langle (4, 1, 1) \rangle$

5. Sea $E = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ el espacio de los polinomios de grado menor que 4 y considérese la aplicación lineal derivada:

$$D : E \to E$$
$$p(x) \mapsto p'(x)$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

a) D es un isomorfismo. ; **b)** $\operatorname{Im} D = \langle 1, x, x^2 \rangle$, $\ker D = \langle 1 \rangle$.

c) $\operatorname{Im} D \cap \ker D = \{0\}$; **d)** $E = \operatorname{Im} D + \ker D$

6. Dadas las matrices A, $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$, si $\det B \neq 0$ el determinante de la matriz $B^{-1} \cdot A \cdot B$ es igual a:

a) $\det A$; **b)** $\dfrac{1}{\det A}$; **c)** $\det A \cdot \det B$

7. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal de matriz asociada en la base $\{e_1,e_2,e_3\}$ la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) $T(e_1+e_2)=3e_1+e_3$; **b)** $\ker T=0$
c) $\operatorname{Im} T=\langle(1,1,1),(2,-1,0)\rangle$; **d)** T es un isomorfismo.

8. Sea $\{e_1,e_2,e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$T(e_1)=e_2+e_3\,,\quad \ker T=\langle e_1-e_2\rangle\,,\quad T(e_3)=e_1$$

La matriz de T respecto de la base $\{e_1,e_2,e_3\}$ es:
a) $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$

9. En la base $\{(1,0,1),(0,1,1),(-1,0,2)\}$ las coordenadas del vector e son $(1,2,3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base $\{(0,0,1),(0,-1,0),(1,1,0)\}$?
a) $(-9,4,2)$; **b)** $(9,-4,-2)$; **c)** $(9,-4,2)$

10. Si $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$ es la matriz de $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ en la base $\{e_1,e_2,e_3\}$, la matriz de T en la base
$\bar e_1=e_1-e_2$, $\bar e_2=e_1+e_2+e_3$, $\bar e_3=e_2-2e_1$ es:
a) $\bar A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$
b) $\bar A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$
c) $\bar A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}$

11. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(1,3)=(-5,6)$ y $f(2,-1)=(1,3)$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) La matriz de f respecto de las bases $\{u_1=(1,3),u_2=(2,-1)\}$ y $\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es: $\begin{pmatrix}-5&1\\6&3\end{pmatrix}$
b) La matriz de f respecto de las bases $\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ y $\{v_1=(-5,6),v_2=(1,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
c) La matriz de f respecto de la base $\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es:

$$\begin{pmatrix}-5&1\\6&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}^{-1}$$

d) La matriz de f respecto de las bases $\{u_1=(1,3),u_2=(2,-1)\}$ y $\{v_1=(-5,6),v_2=(1,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

12. Sea E el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y sea T el endomorfismo de E definido por:

$$T(a+bx+cx^2)=a-b+(2b-c)x+(a+b-c)x^2$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) La matriz de T respecto de la base $\{1, x, x^2\}$ de E es: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) La matriz de T respecto de la base $\{1, x^2, x\}$ de E es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) La matriz de T respecto de la base $\{1, x^2, x\}$ de E es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) La matriz de T respecto de la base $\{x^2, x, 1\}$ de E es: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

13. Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} x + 2y - z = \bar{x} \\ x \qquad\; + z = \bar{y} \\ \qquad\quad\; - z = \bar{z} \end{array}\right.$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) La matriz de T es invertible.
b) T deja invariante la recta $\langle(1, -1, 0)\rangle$.
c) La restricción de T al subespacio $\langle(1, -1, 0)\rangle$ es una homotecia de razón -1.
d) $\ker T = \langle(1, -1, 0)\rangle$.

14. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ tal que $A \cdot A^t = I$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) A es invertible. ; **b)** $\det A = \pm 1$. ; **c)** $A^{-1} = A^t$; **d)** A no es invertible.

15. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y sea

$$\begin{aligned} D \colon E &\to E \\ p(x) &\mapsto p'(x) \end{aligned}$$

el operador derivada. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) La matriz de D respecto de la base $\{1, x, x^2\}$ de E es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\ker D = \langle 1 \rangle$, $\operatorname{Im} D = \langle 1, x \rangle$.
c) $\ker D^2 = \langle 1, x \rangle$, $\operatorname{Im} D^2 = \langle 1 \rangle$.

d) La matriz de D respecto de la base $\{1, x, x^2\}$ de E es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, para $n > 1$ se verifica:
a) $A^n = 2^n A$; **b)** $A^n = 2^{n-1} A$; **c)** $A^n = (-2)^n A$; **d)** $A^n = (-2)^{n-1} A$

17. Dada la ecuación matricial $AX = B$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

a) No tiene solución. **b)** Tiene solución y es la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Tiene solución y es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **d)** Tiene infinitas soluciones.

18. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) A es simétrica y B es hemisimétrica. **b)** A es simétrica pero B no es hemisimétrica.
c) A es simétrica y $A - A^t$ es hemisimétrica. **d)** B no es hemisimétrica y $B + B^t$ es simétrica.

19. Dado el sistema lineal:

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= a \\ x + ay + z &= a^2 \\ x + y + az &= a^3 \end{aligned}\right\}$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) Si $a = 0$ sólo tiene la solución trivial.
b) Si $a \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ el sistema es compatible determinado.
c) Si $a = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones.
d) Si $a = -2$ el sistema es compatible e indeterminado con grado de indeterminación 2.

20. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, su potencia n-ésima es:

a) $A^n = \begin{pmatrix} n & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & n \end{pmatrix}$; **b)** No se puede calcular.

c) $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$; **d)** $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

21. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & \lambda + 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:
a) A es invertible para $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$.
b) A no tiene inversa, independientemente del valor que tome λ.
c) A es invertible si $\lambda \neq 0$.

22. Dada la ecuación matricial $AX + B = C$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

a) No tiene solución. **b)** Tiene solución y es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Tiene solución y es $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **d)** Tiene infinitas soluciones.

23. Dado el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y - \lambda z &= -\lambda \\ x + y + z &= 1 \\ -3x + (\lambda + 1)y + 2z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) Para $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, -4\}$ el sistema tiene solución única.
b) Si $\lambda = -1$ el sistema tiene infinitas soluciones.
c) Si $\lambda = -4$ el sistema no tiene solución.
d) Si $\lambda = 4$ la única solución del sistema es $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$.