1. Espacio vectorial dual. Base dual. Funciones coordenadas

Sea E un k-espacio vectorial.
El conjunto E^* de las aplicaciones lineales de E en k, $E^* = \{E \xrightarrow{\omega} k \text{ lineales }\}$, es un k-espacio vectorial respecto de la suma de aplicaciones lineales y del producto de una aplicación lineal por un escalar.
E^* se llama *espacio dual* de E y los elementos de E^* se llaman *formas lineales*.

Teorema 1.1. (Base dual) *Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E , las n formas lineales $\{\omega_1, \dots \omega_n\}$ definidas por $\omega_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$, para $1 \leq i, j \leq n$, forman una base de E^*, la base dual de $\{e_1, \dots, e_n\}$. En particular,* $\dim_k E^* = \dim_k E$

Demostración.
• $\{\omega_1, \dots \omega_n\}$ generan E^*.
Sea $\omega \in E^*$ y $\omega(e_i) = \lambda_i \in k$ para $i = 1 \dots n$.
La forma lineal $\lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_n\omega_n$ coincide con ω sobre la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, $(\lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_n\omega_n)(e_i) = \lambda_i = \omega(e_i)$, luego $\lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_n\omega_n = \omega$, pues dos aplicaciones lineales que coinciden sobre todos los vectores de una base son iguales.
• $\{\omega_1, \dots \omega_n\}$ son linealmente independientes.
Si $\lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_n\omega_n = 0$, para todo $i = 1 \dots n$ se verifica que $(\lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_n\omega_n)(e_i) = \lambda_i = 0$. □

Las formas lineales ω_i son las *funciones coordenadas* sobre E, esto es, si $e = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ es $\omega_i(e) = x_i$.
Por otra parte, si $e = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ y $\omega = p_1\omega_1 + \cdots + p_n\omega_n$ se tiene:

$$\omega(e) = x_1p_1 + \cdots + x_np_n$$

2. Morfismo traspuesto

Dada una aplicación lineal $E \xrightarrow{T} E'$, para cada $\theta \in E'^*$ la aplicación lineal $E \xrightarrow{\theta \circ T} k$ es una forma lineal $\theta \circ T \in E^*$, lo que permite definir una aplicación

$$E'^* \xrightarrow{T^*} E^*$$
$$\theta \mapsto \theta \circ T$$

que es lineal: $T^*(\lambda\theta + \mu\theta') = (\lambda\theta + \mu\theta') \circ T = \lambda(\theta \circ T) + \mu(\theta' \circ T) = \lambda T^*(\theta) + \mu T^*(\theta')$.
T^* es la *aplicación lineal traspuesta* o *morfismo traspuesto* de T.

Proposición 2.1. *Si A es la matriz asociada al morfismo $E \xrightarrow{T} E'$ respecto de las bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E y $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de E', la matriz asociada al morfismo traspuesto $E'^* \xrightarrow{T^*} E^*$ respecto de las bases duales $\{\omega'_1, \dots, \omega'_n\}$ de E'^* y $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ de E^* es la matriz traspuesta de A.*

Demostración. Si $B = (b_{ij})$ es la matriz de T^* en las bases duales y $A = (a_{ij})$ la matriz de T en las bases dadas, se tiene:

$$T^*(\omega'_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\omega_i \Rightarrow b_{ij} = T^*(\omega'_j)(e_i) = \omega'_j(T(e_i)) = \omega'_j(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}e'_k) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\omega'_j(e'_k) = a_{ji}$$

□

Ejemplo 2.2. Dada la aplicación lineal

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z, t) \mapsto (x - 2y + t, y + z, x - t)$$

Calculemos bases y dimensión de $\operatorname{Im} T^*$ y $\ker T^*$, siendo $(\mathbb{R}^3)^* \xrightarrow{T^*} (\mathbb{R}^4)^*$ su morfismo traspuesto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \operatorname{rg} A^t = \dim \operatorname{Im} T^* = 3 \Rightarrow \dim \ker T^* = 3{-}3 = 0$$

Se deduce:

$$\operatorname{Im} T^* = \{(1, -2, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, -1)\}, \quad \ker T^* = \{0\}$$

3. Cambio de base en el dual

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E y $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ su base dual en E^*. Y sean $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ otra base de E (base nueva de E) y $\{\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_n\}$ su base dual (base nueva de E^*). Si representamos por B la matriz del cambio de base en E y por B^* la matriz de cambio de base en E^*, se verifica:

$$B^* = (B^t)^{-1}$$

En efecto:
La aplicación que realiza el cambio de base de matriz B es

$$\langle \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n \rangle = E \xrightarrow{Id_B} E = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$$

y su morfismo traspuesto

$$\langle \omega_1, \ldots, \omega_n \rangle = E^* \xrightarrow{Id_{B^t}} E^* = \langle \bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_n \rangle$$

es preciasamente el inverso del morfismo del cambio de base en E^* de matriz B^*, $(Id_{B^t})^{-1} = Id_{B^*}$, luego $B^* = (B^t)^{-1}$.

• *Cambio de base para formas lineales*
Si $\omega = p_1\omega_1 + \cdots + p_n\omega_n = \bar{p}_1\bar{\omega}_1 + \cdots + \bar{p}_n\bar{\omega}_n$, esto es, $(p_1, \ldots, p_n)$ son las coordenadas antiguas de ω y $(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)$ sus coordenadas nuevas , se tiene:

$$\begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \end{pmatrix} = (B^*)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \end{pmatrix} = B^t \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{p}_1 & \ldots & \bar{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \cdot B$$

Ejemplo 3.1. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual.
(a) Probar que los vectores $\bar{e}_1 = e_1 - e_2$, $\bar{e}_2 = e_1 + 2e_2 + e_3$ y $\bar{e}_3 = e_1 + e_2$ forman una nueva base de E y calcular su base dual $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$.
(b) Calcular la expresión de la forma lineal $\omega = 3\omega_1 + 2\omega_2$ en la base $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$
Solución

(a) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ es una base de E y B es la matriz del cambio de base.

$B^* = (B^t)^{-1} = \frac{1}{|B|} Adj B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\omega}_1 = \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_3 \\ \bar{\omega}_2 = -\omega_3 \\ \bar{\omega}_3 = \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2 + \frac{3}{2}\omega_3 \end{cases}$, pues las columnas de B^* son las coordenadas de las formas lineales de la nueva base $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$ de E^* respecto de la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \omega = \bar{\omega}_1 + 7\bar{\omega}_2 + 5\bar{\omega}_3$.

4. Espacio bidual. Teorema de Reflexividad

El *espacio bidual*, E^{**}, es el dual del espacio dual E^*:

$$E^{**} = \{E^* \to k \text{ lineales}\}\,, \quad \dim_k E^{**} = \dim_k E^* = \dim_k E\,.$$

Teorema 4.1. (Reflexividad). *Si E es un k-espacio vectorial de dimensión finita, la aplicación $E \xrightarrow{\phi} E^{**}$ definida por $\phi(e)(\omega) = \omega(e)$, para cada $e \in E$ y $\omega \in E^*$, es un isomorfismo.*

Demostración.
• ϕ es lineal.
$\phi(\lambda e+\mu e')(\omega) = \omega(\lambda e+\mu e') = \lambda\omega(e)+\mu\omega(e') = \lambda\phi(e)(\omega)+\mu\phi(e')(\omega) = (\lambda\phi(e)+\mu\phi(e'))(\omega)$, para toda $\omega \in E^*$.
• ϕ es inyectiva.
Si $e \in \ker\phi$ es $\phi(e) = 0$, luego $\phi(e)(\omega) = \omega(e) = 0$ para toda $\omega \in E^*$. En particular, si $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es la base dual de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ en la que las coordenadas del vector e son $(x_1, \dots, x_n)$, resulta que $\omega_i(e) = x_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$, lo que prueba que $e = 0$.
• ϕ es epiyectiva pues es inyectiva y $\dim_k E^{**} = \dim_k E$. □

Observación. El teorema de Reflexividad permite identificar los vectores de E como elementos del espacio bidual E^{**} en el modo $e(\omega) = \omega(e)$. De manera que si $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ son las funciones coordenadas sobre E, los vectores $\{e_1, \dots, e_n\}$ de su base dual se pueden entender como las funciones coordenadas sobre el espacio dual E^*.

5. Subespacio incidente. Dimensión. Propiedades

Sea V un subespacio de E. Se define el siguiente subconjunto de E^*:

$$V^0 = \{\omega \in E^* : \omega(v) = 0 \text{ , para todo } v \in V\}$$

Teorema 5.1. *V^0 es un subespacio de E^*, el subespacio incidente con V, y su dimensión es:*

$$\dim_k V^0 = \dim_k E - \dim_k V$$

Demostración.
1) V^0 es cerrado por combinaciones lineales.
Si $\omega, \omega' \in V^0$ y $\lambda, \mu \in k$, para cada $v \in V$ se tiene: $(\lambda\omega + \mu\omega')(v) = \lambda\omega(v) + \mu\omega'(v) = 0 \Rightarrow \lambda\omega + \mu\omega' \in V^0$.
2) Construyamos una base de V^0.
Sea $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base de V. Ampliemos esta base para formar una base $\{v_1, \dots, v_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ de E y sea $\{\theta_1, \dots, \theta_m, \theta_{m+1}, \dots, \theta_n\}$ su base dual.
Probaremos que las $n - m$ formas lineales $\{\theta_{m+1}, \dots, \theta_n\}$ forman una base de V^0:

- $\{\theta_{m+1}, \dots, \theta_n\}$ están en V^0, ya que $\theta_{m+1}(v_i) = 0, \dots, \theta_n(v_i) = 0$, para $i = 1, \dots, m$, pues $\{\theta_1, \dots, \theta_m, \theta_{m+1}, \dots, \theta_n\}$ es la base dual de $\{v_1, \dots, v_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$.
- $\{\theta_{m+1}, \dots, \theta_n\}$ generan V^0.
  Si $\omega \in V^0 \subseteq E^*$ es $\omega = \lambda_1\theta_1 + \dots + \lambda_m\theta_m + \lambda_{m+1}\theta_{m+1} + \dots + \lambda_n\theta_n$ y como $\omega(v) = 0$ para todo $v \in V$, se tiene que $\omega(v_i) = \lambda_i = 0$ para $i = 1, \dots, m$. Luego $\omega = \lambda_{m+1}\theta_{m+1} + \dots + \lambda_n\theta_n$.

- $\{\theta_{m+1}, \dots, \theta_n\}$ son linealmente independientes pues forman parte de una base.

$\square$

Proposición 5.2. Propiedades del incidente.
(1) $E^0 = \{0\}\,, \quad \{0\}^0 = E^*$.
(2) *Si E_1 y E_2 son subespacios de E tales que $E_1 \subseteq E_2$ se verifica $E_1^0 \supseteq E_2^0$.*
(3) *Si V es un subespacio de E, $V^{00} = V$.*
(4) *Si E_1 y E_2 son subespacios de E se verifica:*

$$(E_1 + E_2)^0 = E_1^0 \cap E_2^0\,, \quad (E_1 \cap E_2)^0 = E_1^0 + E_2^0$$

(5) *Si $E = E_1 \oplus E_2$ también $E^* = E_1^0 \oplus E_2^0$*
(6) *Si $E \xrightarrow{T} E'$ es una aplicación lineal y $E'^* \xrightarrow{T^*} E^*$ su morfismo traspuesto, se verifica:*

$$\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^0\,, \quad \operatorname{Im} T^* = (\ker T)^0$$

Demostración.
(1) $\dim_k E^0 = \dim_k E - \dim_k E = 0 \Rightarrow E^0 = \{0\}$.
$\{0\}^0 \subseteq E^*$ y $\dim_k \{0\}^0 = \dim_k E - 0 = \dim_k E^* \Rightarrow \{0\}^0 = E^*$.
(2) Si $\omega \in E_2^0$ es $\omega(e_2) = 0$ para todo $e_2 \in E_2$ y como $E_1 \subseteq E_2$ también es $\omega(e_1) = 0$ para todo $e_1 \in E_1$, luego $\omega \in E_1^0$.
(3) Si $e \in V$ para toda $\omega \in V^0$ es $\omega(e) = 0$ y por reflexividad $e(\omega) = 0$, luego $e \in V^{00}$, así $V \subseteq V^{00}$ y como $\dim_k V^{00} = \dim_k E^* - \dim_k V^0 = \dim_k E^* - \dim_k E - \dim_k V = \dim_k V$ es $V = V^{00}$.
(4)

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \subseteq E_1 + E_2 \Rightarrow E_1^0 \supseteq (E_1 + E_2)^0 \\ E_2 \subseteq E_1 + E_2 \Rightarrow E_2^0 \supseteq (E_1 + E_2)^0 \end{array}\right\} \Rightarrow (E_1 + E_2)^0 \subseteq E_1^0 \cap E_2^0$$

Por otra parte, para cada $\omega \in E_1^0 \cap E_2^0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega \in E_1^0 \Rightarrow \omega(e_1) = 0\,, \forall e_1 \in E_1 \\ \omega \in E_2^0 \Rightarrow \omega(e_2) = 0\,, \forall e_2 \in E_2 \end{array}\right\}$, luego $\omega(e_1 + e_2) = 0$ para todo $e_1 + e_2 \in E_1 + E_2$ y por tanto $\omega \in (E_1 + E_2)^0$, lo que prueba que $E_1^0 \cap E_2^0 \subseteq (E_1 + E_2)^0$ y así $(E_1 + E_2)^0 = E_1^0 \cap E_2^0$.
(5) Si $E = E_1 \oplus E_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} E = E_1 + E_2 \Rightarrow E^0 = (E_1 + E_2)^0 \Rightarrow \{0\} = E_1^0 \cap E_2^0 \\ E_1 \cap E_2 = \{0\} \Rightarrow (E_1 \cap E_2)^0 = \{0\}^0 \Rightarrow E_1^0 + E_2^0 = E^* \end{array}\right\}$, luego $E^* = E_1^0 \oplus E_2^0$.
(6)

$$(\operatorname{Im} T)^0 = \{\omega' \in E'^* : \omega'(T(e)) = 0\,, \forall e \in E\} = \{\omega' \in E'^* : T^*\omega' = 0\} = \ker T^*$$
$$\operatorname{Im} T^* = \{\omega \in E^* : \omega = T^* \backslash \omega' = \omega' \circ T\} == \{\omega \in E^* : \omega(e) = 0\,, \forall e \in \ker T\} = (\ker T)^0$$

$\square$

6. Ecuaciones paramétricas e implícitas de un subespacio

Sea V un subespacio de E y $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base de V. Para todo $e \in V$ se tiene:
Ecuación paramétrico vectorial de V: $e = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$, para ciertos $\lambda_i \in k$.
Si se expresa esa ecuación en coordenadas respecto de una base de E, $e = (x_1, \dots, x_n)$, $v_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$, se obtienen unas *ecuaciones paramétricas de V*:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 a_{11} + \dots + \quad \lambda_m a_{1m} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ x_n = \lambda_1 a_{n1} + \dots + \quad \lambda_m a_{nm} \end{cases}$$

De la ecuación paramétrico vectorial se sigue que la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $e, v_1, \ldots, v_m$, respecto de una base de E, tiene rango m,

$$\mathrm{rg}(e, v_1, \ldots, v_m) = m, \text{ para todo } e \in V\,.$$

De modo que, elegido un menor de orden m no nulo, esta condición equivale a la anulación de $n - m$ menores de orden $m + 1$, que dan el número mínimo de ecuaciones linealmente independientes que definen unas *ecuaciones implícitas de* V.

Ejemplo 6.1. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\{v_1 = (1, 0, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1, 1), v_3 = (1, -1, 0, 0)\}$. Calculemos unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de V.
$\dim V = \mathrm{rg}(v_1, v_2, v_3) = 2, V = \langle v_1, v_2\rangle$.
• Ecuación paramétrico vectorial de V: $e = \lambda v_1 + \mu v_2$, para todo $e \in V$.

• Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda + \mu \\ t = \lambda + \mu \end{cases}$.

• Ecuaciones implícitas

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow -x - y + z = 0 \\ \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow -x - y + t = 0 \end{matrix} \right\}$$

7. Subespacio incidente y ecuaciones implícitas

Sea V un subespacio de E de dimensión m.
Por reflexividad se tiene:

$$V = \{e \in E : e(\omega) = \omega(e) = 0 \text{ para todo } \omega \in V^0\}$$

Luego si se conoce una base del subespacio incidente con V, $V^0 = \langle\theta_1, \ldots, \theta_{n-m}\rangle$, el subespacio V queda determinado por las $n - m$ escuaciones:

$$V = \{e \in E : \theta_1(e) = \cdots = \theta_{n-m}(e) = 0\}\,,$$

que en coordenadas respecto de una base de E y su base dual dan unas ecuaciones implícitas de V.

Ejemplo 7.1. Sean $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ su base dual. Si V es el subespacio de E del que se conoce una base $\{\theta_1 = 2\omega_1 - 3\omega_3 + \omega_4, \theta_2 = \omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3 - 3\omega_4\}$ de su subespacio incidente V^0, unas ecuaciones implícitas de V son:

$$\left.\begin{matrix} \theta_1(e) = 0 \\ \theta_2(e) = 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{e = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4} \begin{cases} 2x - 3z + t = 0 \\ x - 2y + z - 3t = 0 \end{cases}$$

Recíprocamente si se conocen unas ecuaciones implícitas del subespacio V se tiene automáticamente una base de su subespacio incidente V^0.

$$V \equiv \left\{ \begin{matrix} x - y + 2t = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow V^0 = \langle\omega_1 - \omega_2 + 2\omega_4, 2\omega_2 - 3\omega_3\rangle\,.$$

8. Problemas propuestos

1. Sean $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Probar que las formas lineales $\bar{\omega}_1 = 2\omega_1 - 3\omega_2$, $\bar{\omega}_1 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$ y $\bar{\omega}_1 = \omega_2 + \omega_3$ forman una base de E^* y calcular su base dual $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

2. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, $E = \{ax^2 + bx + c\colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(a) Demostrar que los polinomios $1 + x^2$, $x + x^2$, $1 + x + x^2$ forman una base de E.

(b) Sea $\{\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3\}$ la base dual de la base anterior y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ la base dual de $\{1, x, x^2\}$. Calcular las coordenadas de $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ en la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

(c) Considerando el morfismo derivada $D\colon E \to E$ dado por $D(p(x)) = p'(x)$, calcular las coordenadas de la imagen de ω_1 en la base $\{\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3\}$ por el morfismo inducido en el dual.

3. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Sea T el endomorfismo de E definido por $T(x, y, z) = (-3x + 2y + z, 3x + y + 5z, -3x - 3z)$. Si $T^*\colon E^* \to E^*$ es el endomorfismo inducido en el dual, averigua si las formas lineales $T^*(\omega_1 + 2\omega_2), T^*(2\omega_1 + \omega_2), T^*(\omega_1 + \omega_2)$ forman una base de E^*.

4. Sea E el espacio vectorial real de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Sea $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ la base dual de la base $\{1, x, x^2\}$. Se definen las aplicaciones $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3\colon E \to \mathbb{R}$ por las fórmulas:

$$\overline{\omega}_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx\,, \quad \overline{\omega}_2(p(x)) = \int_0^1 xp(x)dx\,, \quad \overline{\omega}_3(p(x)) = \int_0^1 x^2p(x)dx$$

Pruébese que $\{\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3\}$ es una base de E^*. Hállense las coordenadas de dichos elementos respecto de la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Determinar en E una base para la cual $\{\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3\}$ sea su base dual.

5. Sea E_1 el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (2, 5, 4, 0)$ y sea E_2 el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $u_1 = (0, 5, 5, 0)$, $u_2 = (5, 5, 7, 0)$, $u_3 = (-10, 1, 5, 1)$.

(a) Calcula una base y la dimensión de los subespacios E_1, E_2 $E_1 + E_2$ y $E_1 \cap E_2$.

(b) Halla los subespacios incidentes de los del apartado anterior.

6. En un espacio vectorial de dimensión 5 sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ una base y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ su base dual. Sea F el subespacio generado por los vectores

$$u_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ u_2 = e_2 - e_4,\ u_3 = e_3 + 2e_4 - e_5$$

Hállese la dimensión de F y calcúlese una base de su espacio incidente.

7. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Dada la aplicación lineal $T\colon E^* \to E$ definida por

$$T(\omega_1) = e_1 - e_2,\ T(\omega_2) = 2e_1 + e_2 + e_3,\ T(\omega_3) = 3e_2 + e_3$$

Calcular bases de $\ker T$, $Im\,T$, $(\ker T)^\circ$, $(Im\,T)^\circ$.

8. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(-2, 2, 1, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(-6, 7, 4, 3)$.

9. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$ generados por:

$$E_1 =< (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, -1, 1, -1) >$$
$$E_2 =< (1, 2, 3, 4), (-1, 0, 1, 3), (0, 1, -1, 2), (1, 2, -1, 4) >$$
$$E_3 =< (1, 2, 3, 0), (1, 0, 1, 0), (0, -1, 2, 0), (-1, 1, 3, 0) >$$

Hallar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones implícitas de dichos subespacios.

10. Se considera en $\mathbb{Q}^5$ el subespacio V determinado por las ecuaciones $2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0$, $4x_1 + 2x_2 + x_5 = 0$, $3x_2 - x_4 + 2x_5 = 0$. Determinar las ecuaciones paramétricas de V y calcular un suplementario.

11. Hallar las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido por $2x - y + z = 0$. Deducir una base del mismo y calcular respecto de ella las coordenadas del vector $(1, 3, 1)$.

12. Hallar las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ que tiene por ecuaciones implícitas $x + y - z + t = 0$, $x - y + z = 0$.

13. Sean E_1 y E_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$E_1 \equiv \langle (1,1,1,0), (0,-1,-1,0), (2,1,1,0) \rangle$$

$$E_2 \equiv \begin{cases} x + t = 0 \\ x - y + z + 2t = 0 \end{cases}$$

(a) Calcular bases y dimensiones de E_1, E_2, $E_1 \cap E_2$ y $E_1 + E_2$.
(b) ¿Es cierto que $\mathbb{R}^4 = E_1 \oplus E_2$?. Calcular un suplementario de E_1.
(c) Calcular una base del subespacio incidente $(E_1)^\circ$ y las ecuaciones implícitas de E_1.
(d) Calcular unas ecuaciones paramétricas de E_2.

14. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual.

(a) Dados los subespacios $F = < e_1 - e_2, 2e_1 - e_3 >$ y $F' = < 2e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 >$, calcula una base de $(F \cap F')^\circ$ y las ecuaciones implícitas y paramétricas de $F \cap F'$.
(b) Demuestra que las formas lineales $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$ definidas por

$$\bar{\omega}_1(e) = x + y + z, \quad \bar{\omega}_2(e) = y - 2z, \quad \bar{\omega}_3(e) = x + y$$

para cada vector $e = xe_1 + ye_2 + ze_3$, forman una base del espacio dual E^*. Calcula una base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ de E cuya base dual sea $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$.
(c) Calcula las coordenadas del vector $u = e_1 - e_2 + e_3$ en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y el incidente del subespacio $< u >$ en función de $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$.