VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA I
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

SEMINARIO V.

3. Espacio dual. Subespacio incidente. Ecuaciones paramétricas e implícitas.

3.1. Ecuaciones paramétricas e implícitas.

31. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$ generados por:
$$E_1 = \langle (1,0,1),(0,1,0)\rangle\,, \quad E_2 = \langle (1,3,2)\rangle$$
Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de dichos subespacios.

32. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$ generados por:
$$E_1 = \langle (1,0,1,0),(1,2,3,0)\rangle\,, \quad E_2 = \langle (1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,1,1,1)\rangle$$
Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de dichos subespacios.

3.2. Espacio dual. Subespacio incidente.

33. Comprueba que $\{\bar{e}_1 = (0,1,1), \bar{e}_2 = (1,0,0), \bar{e}_3 = (2,-1,0),\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y calcula su base dual.

34. Sean las formas lineales de $\mathbb{R}^3$:
$$\bar{\omega}_1(x,y,z) = x+2y+3z, \quad \bar{\omega}_2(x,y,z) = x+6y+8z \quad \text{y} \quad \bar{\omega}_3(x,y,z) = x+10y+14z.$$
Demuestra que $\{\bar{\omega}_i\}_{i=1}^3$ forma una base de $(\mathbb{R}^3)^*$. Calcula las coordendas de la forma lineal $\omega(x,y,z) = 3x+4y+10z$ en dicha base.

35. Dados los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:
$$V = \langle (1,-1,2,1)\rangle\,, V' = \langle (1,-1,2,1),(2,0,-1,-1)\rangle \ \text{ y } \ V'' = \langle (1,-1,2,1),(2,0,-1,-1),(3,3,1,0)\rangle$$
Calcula una base de cada uno de los incidentes y analiza si la forma lineal $\omega(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4$, pertenece a alguno de esos incidentes.

36. Sea $\{e_1,e_2,e_3\}$ una base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E y $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ su base dual. Sea la aplicación lineal $T\colon E^* \to E$ definida por:
$$T(\omega_1) = e_1 - e_2, \quad T(\omega_2) = 2e_1 + e_2 + e_3, \quad T(\omega_3) = 3e_2 + e_3.$$
Calcula bases de $\ker T$, $\operatorname{Im} T$, $(\ker T)^\circ$ y $(\operatorname{Im} T)^\circ$.

37. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3, $\{e_1,e_2,e_3\}$ una base de E y $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ su base dual.
   a) Dados los subespacios $V =< e_1 - e_2, 2e_1 - e_3 >$ y $V' =< 2e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 >$, calcula una base de $(V \cap V')^\circ$ y las ecuaciones implícitas y paramétricas de $V \cap V'$.
   b) Demuestra que las formas lineales $\{\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\bar{\omega}_3\}$ definidas por
   $$\bar{\omega}_1(e) = x+y+z, \quad \bar{\omega}_2(e) = y-2z, \quad \bar{\omega}_3(e) = x+y$$
   para cada vector $e = xe_1 + ye_2 + ze_3$, forman una base del espacio dual E^*. Calcula una base $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ de E cuya base dual sea $\{\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\bar{\omega}_3\}$.
   c) Calcula las coordenadas del vector $u = e_1 - e_2 + e_3$ en la base $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ y el incidente del subespacio $< u >$ en función de $\{\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\bar{\omega}_3\}$.

ALGUNAS SOLUCIONES. SEMINARIO V.

32. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$ generados por:

$$E_1 = \langle (1,0,1,0),(1,2,3,0)\rangle\,, \quad E_2 = \langle (1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,1,1,1)\rangle$$

Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de dichos subespacios.

SOLUCIÓN:

- Ecuaciones de $E_1 = \langle (1,0,1,0),(1,2,3,0)\rangle \subset \mathbb{R}^4$.
  En primer lugar observemos que los vectores $u = (1,0,1,0), v = (1,2,3,0)$ no son proporcionales, luego forman base de E_1. Teniendo en cuenta que todo vector de E_1 se expresa de modo único como combinación lineal de u y v se tiene que un vector $e = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ pertenece a E_1 si y sólo si $e = \lambda u + \mu v$ (donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). Escribir esta relación en coordenadas es dar la ecuación paramétrico-vectorial de E_1:

  $$(x,y,z,t) = \lambda(1,0,1,0) + \mu(1,2,3,0)\,.$$

  Las ecuaciones paramétricas de E_1 son por tanto:

  $$\begin{aligned} x &= \lambda + \mu \\ y &= 2\mu \\ z &= \lambda + 3\mu \\ t &= 0 \end{aligned}$$

  Daremos ahora las ecuaciones implícitas de E_1 de dos formas, en primer lugar usando la teoría del rango. Recordemos que un vector e de $\mathbb{R}^4$ está en E_1 si $e = \lambda u + \mu v$, o equivalentemente, si e es combinación lineal de u y v, y por lo tanto (como u y v son base de E_1) si $\operatorname{rg}(e,u,v) = \operatorname{rg}(u,v) = 2$. En coordenadas:

  $$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2\,.$$

  Luego fijado un menor de orden 2 no nulo (que nos da la dimensión de E_1), por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, esta condición equivale a la anulación de dos menores de orden 3:

  $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x & y & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

  que son las ecuaciones implícitas de E_1, y que simplificando resultan:

  $$x + y - z = 0 \qquad\qquad t = 0\,.$$

  Calculemos ahora utilizando el subespacio incidente a E_1. La dimensión de $\overset{\circ}{E_1}$ es 2 (la fórmula de la dimensión dice que $\dim_{\mathbb{R}} \overset{\circ}{E_1} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 - \dim_{\mathbb{R}} E_1$), y se tiene:

  $$\begin{aligned} E_1^\circ : &= \{\omega = (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^{4,*} \,|\, \omega(u) = 0 \text{ y } \omega(v) = 0\} = \\ &= \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \,|\, \alpha + \gamma = 0,\ , \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0\} = \langle (1,1,-1,0),(0,0,0,1)\rangle = \langle \theta_1, \theta_2\rangle \end{aligned}$$

  Por reflexividad tenemos que $E_1 = (\overset{\circ}{E_1})^\circ$, luego un vector $e = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ yace en E_1 si y sólo si:

  $$\theta_1(x,y,z,t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \theta_2(x,y,z,t) = 0\,,$$

  es decir, si y sólo si:

  $$x + y - z = 0 \qquad \text{y} \qquad t = 0\,.$$

- Ecuaciones de $E_2 = \langle (1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,1,1,1)\rangle = \langle u_1,u_2,u_3\rangle \subset \mathbb{R}^4$. Es fácil comprobar que $\operatorname{rg}(u_1,u_2,u_3) = 3$ y por lo tanto estos vectores forman base de E_2. Se tiene entonces que un vector cualquiera $e = (x,y,z,t)$ de E_2 es de la forma:

  $$(x,y,z,t) = \alpha(1,1,0,0) + \beta(1,0,1,0) + \gamma(1,1,1,1)\,, \qquad \text{con } \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\,.$$

En consecuencia las ecuaciones paramétricas de E_2 son:

$$\begin{aligned} x &= \alpha+\beta+\gamma \\ y &= \alpha+\gamma \\ z &= \beta+\gamma \\ t &= \gamma \end{aligned}$$

Como $\dim_{\mathbb{R}} \overset{\circ}{E_2} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 - \dim_{\mathbb{R}} E_2 = 4-3 = 1$, entonces E_2 viene descrito por una ecuación implícita, que se deduce directamente de las ecuaciones paramétricas anteriores:

$$x-y-z+t=0\,.$$

37. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3, $\{e_1,e_2,e_3\}$ una base de E y $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ su base dual.
    a) Dados los subespacios $V=<e_1-e_2, 2e_1-e_3>$ y $V'=<2e_2+e_3, e_1+e_2+e_3>$, calcula una base de $(V\cap V')^\circ$ y las ecuaciones implícitas y paramétricas de $V\cap V'$.
    b) Demuestra que las formas lineales $\{\bar\omega_1,\bar\omega_2,\bar\omega_3\}$ definidas por

    $$\bar\omega_1(e)=x+y+z, \quad \bar\omega_2(e)=y-2z, \quad \bar\omega_3(e)=x+y$$

    para cada vector $e=xe_1+ye_2+ze_3$, forman una base del espacio dual E^*. Calcula una base $\{\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ de E cuya base dual sea $\{\bar\omega_1,\bar\omega_2,\bar\omega_3\}$.
    c) Calcula las coordenadas del vector $u=e_1-e_2+e_3$ en la base $\{\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ y el incidente del subespacio $<u>$ en función de $\{\bar\omega_1,\bar\omega_2,\bar\omega_3\}$.

Solución:

a) Se tiene que $\{v_1=(1,-1,0), v_2=(2,0,-1)\}$ y $\{v_1'=(0,2,1), v_2'=(1,1,1)\}$ son bases de V y V' respectivamente (pues no son proporcionales). Dado que nos piden calcular también las ecuaciones paramétricas, calculemos una base de $V\cap V'$. Teniendo en cuenta que los vectores $\{v_1,v_2,v_1'\}$ forma base de $V+V'$ (pues $\det(v_1,v_2,v_1')\neq 0$) y la fórmula de la dimensión:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V+V') = \dim_{\mathbb{R}} V + \dim_{\mathbb{R}} V' - \dim_{\mathbb{R}}(V\cap V')\,,$$

se deduce que $\dim_R(V\cap V')=1$, y dado que $v_2'-v_1'=v_1$ se tiene que:

$$V\cap V' = \langle v_1\rangle = \langle (1,-1,0)\rangle\,.$$

En consecuencia, todo vector $u=(x,y,z)$ de $V\cap V'$ se escribe como $u=\lambda v_1$ (con $\lambda\in\mathbb{R}$) y las ecuaciones paramétricas de $V\cap V'$ son:

$$x=\lambda\,, \quad y=-\lambda\,, \quad z=0\,.$$

Por otra parte tenemos que:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V\cap V')^\circ = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}}(V\cap V') = 3-1=2\,,$$

luego dos será el número de ecuaciones implícitas que definen $V\cap V'$, y como de las ecuaciones (paramétricas) anteriores se deduce que:

$$x+y=0\,, \quad z=0$$

se concluye que estas son precisamente las ecuaciones implícitas de $V\cap V'$.
Por último, dadas las ecuaciones implícitas se sigue que $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $(V\cap V')^\circ$.

b) Las coordenadas de la formas $\bar\omega_1$, $\bar\omega_2$ y $\bar\omega_3$ en la base $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ son:

$$\bar\omega_1=(1,1,1)\,, \quad \bar\omega_2=(0,1,-2)\,, \quad \bar\omega_3=(1,1,0)\,.$$

Como la dimensión del espacio dual E^* es 3 y $\det(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\neq 0$ se sigue que dichas formas lineales forma base de E^*.
Para calcular una base $\{\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ de E dual de $\{\bar\omega_1,\bar\omega_2,\bar\omega_3\}$ observemos en primer lugar que ya tenemos la matriz de cambio de base de $\{\bar\omega_1,\bar\omega_2,\bar\omega_3\}$ a $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$:

$$E^*_{\{\bar\omega_1,\bar\omega_2,\bar\omega_3\}} \to E^*_{\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}} \rightsquigarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

El morfismo $E^*_{\{\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\bar{\omega}_3\}} \to E^*_{\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}}$ induce un morfismo entre los espacios vectoriales duales (morfismo transpuesto) $E_{\{e_1,e_2,e_3\}} \to E_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}}$ (por reflexividad $E^{**} \simeq E$ y donde $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ es la base dual de $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$ que buscamos) cuya matriz asociada es C^t.
Por definición de matriz asociada respecto de una pareja de bases, las columnas de la matriz C^t expresan los vectores e_i en función de los $\bar{e}_j$, que es justo lo contrario a lo que nos pide el ejercicio. Por lo tanto nos interesa conocer la matriz de $E_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}} \to E_{\{e_1,e_2,e_3\}}$, que precisamente es:

$$(C^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se concluye entonces que:

$$\bar{e}_1 = (-2, 2, 1)\,, \quad \bar{e}_2 = (-1, 1, 0)\,, \quad \bar{e}_3 = (3, -2, -1)$$

es la base dual de $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$.

c) Las coordenadas del vector $u = e_1 - e_2 + e_3 = (1, -1, 1)$ en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ son:

$$E_{\{e_1,e_2,e_3\}} \to E_{\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}}$$

$$u = (1, -1, 1) \mapsto C^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene así que $u = \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$, luego:

$$\overset{\circ}{\langle u \rangle} = \{\bar{\omega} \in E^*_{\{\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\bar{\omega}_3\}} \,|\, \bar{\omega}(u) = 0\} = \{\bar{\omega} = (\alpha, \beta, \gamma) \in E^*_{\{\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\bar{\omega}_3\}} \,|\, \alpha - 3\beta = 0\} =$$
$$= \langle (3, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = \langle 3\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3 \rangle\,.$$