ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA I
Gloria Serrano Sotelo
Departamento de MATEMÁTICAS

1. Subvariedades afines de un espacio vectorial

Sea E un k-espacio vectorial de dimensión n y sean V un subespacio de E y e_0 un vector de E. El conjunto

$$H = e_0 + V$$

es una **subvariedad afín de vector de posición** e_0 **y subespacio director** V.
Se llama dimensión de la subvariedad afín H a la dimensión de su subespacio director, $\dim_k H = \dim_k V$.
Las subvariedades afines de dimensión 0 son los *puntos*, las de dimensión 1 las *rectas*, las de dimensión 2 *los planos* y las de dimensión $n-1$ los *hiperplanos*.
Las subvariedades afines que pasan por el origen son los subespacios.

Definición 1.1. *Dos subvariedades afines son paralelas* si el subespacio director de una de ellas está contenido en el de la otra.
Si $\dim_k H \leq \dim_k H'$, las subvariedades afines $H = e_0 + V$, $H' = e_0' + V'$ son paralelas si $V \subseteq V'$ o lo que es equivalente $V^0 \supseteq V'^0$.

2. Ecuaciones paramétricas e implícitas de una subvariedad afín H

Sea $H = e_0 + V$ y $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base de V.
Ecuación paramétrico vectorial de H:
$\forall e \in V$ es $e = e_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m$, para ciertos $\lambda_i \in k$.
Expresando esta ecuación en coordenadas respecto de una base de E se obtienen unas cuaciones paramétricas de H.
Ecuaciones implícitas de H:
De la ecuación paramétrico vectorial se sigue que la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $e - e_0, v_1, \dots, v_m$, respecto de una base de E, tiene rango m,

$$\operatorname{rg}(e - e_0, v_1, \dots, v_m) = m, \text{ para todo } e \in H\,.$$

De modo que, elegido un menor de orden m no nulo, esta condición equivale a la anulación de $n-m$ menores de orden $m+1$, que dan el número mínimo de ecuaciones linealmente independientes que definen unas *ecuaciones implícitas de H*.
Por otra parte, si en vez de una base del subespacio director V de H se conoce una base de su subespacio incidente $V^0 = \langle \theta_1, \dots, \theta_{n-m} \rangle$, se pueden obtener directamente unas *ecuaciones implícitas* de $H = e_0 + V$.

$$\forall e \in H \text{ es } e - e_0 \in V \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \theta_1(e - e_0) = 0 \\ \vdots \\ \theta_{n-m}(e - e_0) = 0 \end{matrix} \right\}$$

Ejemplo 2.1. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\{v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (-1,1,1,2), v_3 = (0,1,2,2)\}$. Calculemos unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de la subvariedad afín H de vector de posición $e_0 = (1,0,0,2)$ y subespacio director V.
$\dim H = \dim V = 2$ y $V = \langle v_1, v_3 \rangle$.

• Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda + 2\mu \\ t = 2+2\mu \end{cases}$.

• Ecuaciones implícitas

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 2 \\ t-2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow x+2y-z=1 \\ \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ t-2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow 2y-t=-2 \end{array} \right\}$$

3. Subvariedad afin intersección. Posiciones relativas. Subvariedad afín suma

Sean H y H' subvariedades afines de E.

• La **subvariedad afín intersección** $H \cap H'$ es la máxima subvariedad afín contenida en H y en H'. Los puntos de $H \cap H'$ son las soluciones del sistema lineal determinado por las ecuaciones implícitas de H y de H'.
Dos subvariedades afines **se cortan** *si tienen algún punto en común*, por tanto, H y H' no se cortan si $H \cap H' = \emptyset$.
Dos subvariedades afines **se cruzan** *si ni son paralelas ni se cortan.*

• La **subvariedad afín suma** $H + H'$ es la mínima subvariedad afín que contiene a H y a H'.
Si $H = e_0 + \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ y $H' = e'_0 + \langle u_1, \dots, u_s \rangle$, su suma es:

$$H+H' = e_0 + \langle e_0 - e'_0, v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_s \rangle \ \text{ y } \ \dim(H+H') = \operatorname{rg}(e_0 - e'_0, v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_s)$$

Ejemplo 3.1. Considérense las subvariedades afines de $\mathbb{R}^4$

$$r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=0 \\ z+t=2 \end{cases} \qquad \pi \equiv \begin{cases} x+y+z+t=3 \\ 2x-z=1 \end{cases}$$

(a) Calcula un vector de posición y el subespacio director de la recta r y del plano π.
(b) Averigua si la recta r es paralela al plano π.
(c) Calcula la subvariedad afín intersección $r \cap \pi$.
(d) Calcula la mínima subvariedad afín que contiene a ambas.
(e) Estudia la posición relativa del plano π y el plano $\pi' \equiv \begin{cases} 2x-z+t=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

Solución.

(a) $r = \{(x, 1-x, -1+x, 3-x) \in \mathbb{R}^4\}, \quad \pi = \{(x, y, -1+2x, 4-3x-y) \in \mathbb{R}^4\}$

$$r = e_0 + \langle v \rangle, \quad e_0 = (0,1,-1,3), v = (1,-1,1,-1)$$
$$\pi = e'_0 + \langle u_1, u_2 \rangle, \quad e'_0 = (0,0,-1,4), u_1 = (1,0,2,-3), u_2 = (0,1,0,-1)$$

(b) La recta y el plano *no son paralelos*, ya que el subespacio director de r, $\langle v\rangle$, no está contenido el subespacio director de π,$\langle u_1, u_2\rangle$, pues

$$\operatorname{rg}(v, u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

(c) Sustituyendo las coordenadas de un punto cualquiera $(\lambda, 1-\lambda, -1+\lambda, 3-\lambda)$ de r en las ecuaciones del plano π se tiene

$$\begin{cases} \lambda + 1 - \lambda - 1 + \lambda + 3 - \lambda = 3 \\ 2\lambda + 1 + \lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

Luego la recta y el plano se cortan en el punto $P = (0, 1, -1, 3)$, $r \cap \pi = P$.

(d) $r+\pi = e_0 + \langle e_0 - e_0', v, u_1, u_2\rangle$, pero $e_0 - e_0' = u_2$, luego $r+\pi = e_0 + \langle v, u_1, u_2\rangle$ y $\dim(r+\pi) = 3$. Luego la mínima subvariedad afín que las contiene es el hiperplano de vector de posición e_0 y subespacio director $\langle v, u_1, u_2\rangle$. Calculemos su ecuación implícita:

Para todo $e = (x, y, z, t) \in r + \pi$ es $e - e_0 \in \langle v, u_1, u_2\rangle$, luego $\operatorname{rg}(e - e_0, v, u_1, u_2) = 3$ y por tanto $\det(e - e_0, v, u_1, u_2) = 0$, que en coordenadas da la ecuación implícita de $r + \pi$:

$$r + \pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 \\ y-1 & -1 & 0 & 1 \\ z+1 & 1 & 2 & 0 \\ t-3 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r + \pi \equiv x + y + z + t - 3 = 0$$

(e) Discutamos el sistema lineal determinado por las ecuaciones implícitas de π y de π'.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 3 \\ 2x - z = 1 \\ 2x - z + t = 2 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $\operatorname{rg} A = 4$ y por tanto coincide con el rango de la matriz ampliada. El sistema es pues compatible y el conjunto de soluciones, que es la subvariedad afín intersección $\pi \cap \pi'$, tiene dimensión 0, luego se reduce a un punto. Es decir, los planos π y π' *se cortan en un punto* Q, que se obtiene resolviendo el sistema, $Q = (1, 0, 1, 1)$.

4. Problemas propuestos

1. Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta que pasa por el punto $P = (1, 2, 1, 2)$ y cuya dirección queda determinada por el vector $(1, 3, -2, 7)$.

2. Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas del hiperpano de $\mathbb{R}^4$ que pasa por el punto $P = (0, 1, 2, -4)$ y cuyo subespacio director es $V = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 1, 2)\rangle$.

3. En un espacio vectorial de dimensión 4, hállese la recta que pasa por el origen y corta a las dos rectas siguientes:

$$r_1\colon x = 2 + 3\lambda,\ y = 1 - \lambda,\ z = -1 + 2\lambda,\ t = 3 - 2\lambda$$
$$r_2\colon x = 7\lambda,\ y = 1,\ z = 1 + \lambda,\ t = -1 + 2\lambda$$

4. Hállese el hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que pasa por las rectas:

$$r_1\colon 2x - y = 0,\ x + z = 0,\ 3x - t = 0$$
$$r_2\colon x + y - 3 = 0,\ 2x - z + 1 = 0,\ t = 0$$

5. Hallar la ecuación del haz de hiperplanos que contienen al plano que pasa por los puntos $(1,-2,-3,1)$, $(0,0,1,5)$, $(3,-1,5,0)$.

6. Hállese la dimensión de la mínima subvariedad afín que contiene a dos planos bidimensionales que se cruzan. Calcúlese la dimensión de la mínima subvariedad afín que pasa por los puntos:

$$(-1,2,-1,0,4),(0,-1,3,5,1),(4,-2,0,0,-3),(3,-1,2,5,2)$$

7. Hállense las ecuaciones paramétricas de la mínima subvariedad afín que pasa por las rectas:

$$r\colon x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$$

$$r'\colon \frac{x_1-1}{3} = \frac{x_2}{5} = x_3 - 2 = \frac{x_4+1}{7} = \frac{x_5}{-4}$$

8. Dadas las subvariedades afines de $\mathbb{R}^4$:

$$H =< (0,-1,0,1),(1,1,0,1),(0,0,1,0) > \qquad H' =< (-2,1,1,0),(-3,0,0,1) >$$

(a) Calcular sus ecuaciones implícitas.
(b) Estudiar su posición relativa.
(c) Calcular la mínima subvariedad afín que las contiene.

9. Hallar la subvariedad afín de $\mathbb{R}^4$ que pasa por el punto $(1,0,0,0)$ y cuyo subespacio director es el núcleo del endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuya matriz en la base estándar es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Sea E el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 2. Sea V el plano de los polinomios de grado menor o igual que 1. Sea $\omega\colon E \to \mathbb{R}$ la forma lineal definida por $\omega(p(x)) = \int_0^1 x \cdot p(x)\, dx$. Considerando la base $\{1, x, x^2\}$, calcular las ecuaciones de la recta que pasa por $1 + x^2$ y es paralela a la recta intersección del plano $\omega^{-1}(2)$ con V.

11. Calcular el plano que contiene a la recta $s \equiv x = y = z = t + 1$ y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \\ z + 3t = 1 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \frac{x-2}{2} = y = \frac{z}{-1} = t + 1$$