VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA I
Daniel Hernández Serrano
Darío Sánchez Gómez
Departamento de MATEMÁTICAS

SEMINARIO VI.

4. Geometría Afín.

38. Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de la subvariedad afín de $\mathbb{R}^3$ cuyo vector de posición es $(2,1,-2)$ y cuyo subespacio director viene definido por la ecuación $3x-2y+z=0$.
39. Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de la subvariedad afín de $\mathbb{R}^4$ cuyo vector de posición es $(1,1,1,0)$ y cuyo subespacio director está generado por los vectores $(1,1,1,1),(0,1,0,-1)$.
40. Dados los planos definidos por las siguientes ecuaciones:
$$\pi_1\colon x+z=1$$
$$\pi_2\colon x+y+z=1$$
    a) Demostrar que se cortan en una recta y calcular las ecuaciones paramétricas de la intersección.
    b) Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $P=(1,0,1)$ y la intersección $\pi_1\cap\pi_2$.
41. Hallar las ecuaciones de la recta que está contenida en el plano $x+y+z=4$, es paralela al plano $x-y+z=0$ y pasa por el punto $(2,1,1)$.
42. Calcular las ecuaciones implícitas de las subvariedad afín de R^4 que pasa por el punto $(1,0,2,3)$ y cuyo subespacio director es la imagen de la aplicación lineal:
$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4\\ (x,y,z,t) &\mapsto (x+z-t,-x+y+t,-y-z,z)\end{aligned}$$
43. Estudiar la posición relativa de los siguientes planos según los valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$:
$$\pi_1\colon ax+2y+6z=0\,,\quad \pi_2\colon 2x+ay+4z=2\,,\quad \pi_3\colon 2x+ay+6z=a-2\,.$$
44. Hállese la ecuación de la mínima subvariedad afín de $\mathbb{R}^4$ que contiene a las rectas:
$$r_1\equiv\begin{cases}2x-y=0\\ x+z=0\\ 3z-t=0\end{cases}\qquad r_2\equiv\begin{cases}x+y-3=0\\ 2x-z+1=0\\ t=0\end{cases}$$
45. Sean r_1, r_2 y r_3 las siguientes rectas en $\mathbb{R}^3$:
$$r_1\equiv\begin{cases}x+y+x=0\\ x+2y=0\end{cases}\qquad r_2\equiv\begin{cases}2x+2y+z=0\\ x+y=2\end{cases}\qquad r_3\equiv\begin{cases}2x+3y+z=2\\ y-z=0\end{cases}$$
    a) Demostrar que r_1 y r_3 son paralelas y que r_2 se cruza con ambas.
    b) Calcular las ecuaciones paramétricas e implíticas de un plano paralelo a las tres rectas.

ALGUNAS SOLUCIONES. SEMINARIO VI.

44. Hállese la ecuación de la mínima subvariedad afín de $\mathbb{R}^4$ que contiene a las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ 3z - t = 0 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Solución: Dadas las ecuaciones implícitas se tiene:

$$r_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x - y = 0\,,\, x + z = 0\,,\, 3z + t = 0\} = \{(x,y,z,t) \,|\, y = 2x\,,\, z = -x\,,\, t = -3x\} =$$
$$= \{(x, 2x, -x, -3x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = (0,0,0,0) + \langle (1,2,-1,-3) \rangle = e_0 + \langle v_1 \rangle\,.$$

Análogamente:

$$r_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y - 3 = 0\,,\, 2x - z + 1 = 0\,,\, t = 0\} = \{(x,y,z,t) \,|\, y = 3 - x\,,\, z = 1 + 2x\,,\, t = 0\} =$$
$$= \{(x, 3 - x, 1 + 2x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = (0,3,1,0) + \langle (1,-1,2,0) \rangle = e_0' + \langle v_2 \rangle\,.$$

Por definición, la mínima subvariedad afín que contiene a r_1 y r_2 es la subvariedad afín suma:

$$r_1 + r_2 = e_0 + \langle e_0 - e_0', v_1, v_2 \rangle = (0,0,0,0) + \langle (0,-3,-1,0), (1,2,-1,-3), (1,-1,2,0) \rangle$$

(luego es un subespacio de $\mathbb{R}^4$, pues pasa por el origen) y su dimensión es $\text{rg}(e_0 - e_0', v_1, v_2) = 3$ (es un hiperplano en $\mathbb{R}^4$). Se tiene entonces que un vector $e = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ vive en $r_1 + r_2$ si y sólo si $e = \lambda(e_0 - e_0') + \mu v_1 + \eta v_2$ (con $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$), y por lo tanto sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} x &= \mu + \eta \\ y &= -3\lambda + 2\mu - \eta \\ z &= -\lambda - \mu + 2\eta \\ t &= -3\mu \end{aligned}$$

Por al fórmula de la dimensión:

$$\dim_R (r_1 + r_2)^\circ = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 - \dim_{\mathbb{R}}(r_1 + r_2) = 4 - 3 = 1$$

se tiene que $r_1 + r_2$ viene definida por una ecuación implícita, que deduciremos calculando el incidente a $r_1 + r_2$.

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2)^\circ &= \{w = (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^{4,*} \,|\, w(e_0 - e_0') = 0\,,\, w(v_1) = 0\,,\, w(v_2) = 0\} = \\ &= \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^{4,*} \,|\, -3\beta - \gamma = 0\,,\, \alpha + 2\beta - \gamma - 3\delta = 0\,,\, \alpha - \beta + 2\gamma = 0\} = \\ &= \{(7\beta, \beta, -3\beta, 4\beta) \,|\, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle (7, 1 - 3, 4) \rangle \end{aligned}$$

Luego la ecuación implícita de $r_1 + r_2$ es $7x + y - 3z + 4t = 0$.

45. Sean r_1, r_2 y r_3 las siguientes rectas en $\mathbb{R}^3$:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad r_3 \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

a) Demostrar que r_1 y r_3 son paralelas y que r_2 se cruza con ambas.
b) Calcular las ecuaciones paramétricas e implíticas de un plano paralelo a las tres rectas.

Solución: Antes de contestar, calculemos los vectores de posición y los subespacios directores de las rectas. Procediendo de modo similar al ejercicio anterior se tiene:

$$r_1 = \langle (-2,1,1) \rangle\,, \qquad r_2 = (2,0,-4) + \langle (-1,1,0) \rangle\,, \qquad r_1 = (1,0,0) + \langle (-2,1,1) \rangle.$$

y sus ecuaciones paramétricas son:

$$r_1 = \{x = -2\lambda,\, y = \lambda, z = \lambda\}\,,\, r_2 = \{x = 2 - \alpha,\, y = \alpha,\, z = -4\}\,,\, r_3 = \{x = 1 - 2\beta,\, y = \beta,\, z = \beta\}\,,$$

con $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Dado que los subespacios directores de r_1 y r_3 son el mismo y una pasa por el origen, mientras que la otra no, se deduce que r_1 y r_3 son paralelas.
Para comprobar que r_2 y r_1 se cruzan observemos que como sus subespacios directores no son proporcionales las dos rectas no son paralelas, luego basta ver que no se cortan. En efecto, si se cortaran existirían un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfaciendo las ecuaciones paramétricas de ambas rectas, pero como el sistema:

$$-2\lambda = 2 - \alpha\,, \quad \lambda = \alpha\,, \quad \lambda = -4$$

no tiene solución, r_1 y r_2 no se cortan (y tampoco son paralelas), luego se cruzan.
Con el mismo razonamiento se sigue que el sistema:

$$2 - \alpha = 1 - 2\beta\,, \quad \alpha = \beta\,, \quad -4 = \beta$$

no tiene solución, luego r_2 y r_3 no se cortan, y como sus subespacios directores no están contenidos el uno en el otro, tampoco son paralelas. Así pues r_2 y r_3 también se cruzan.

b) Por definición de paralelismo, el subespacio director V_π de un plano π paralelo a las tres rectas tendrá que contener a los tres subespacios directores de las rectas, y como el de r_1 y r_3 son el mismo se tiene:

$$V_\pi = \langle (-2, 1, 1), (-1, 1, 0) \rangle\,.$$

Para que π que no contenga a ninguna de las rectas basta con encontrar un punto P que no pase por ninguna de ellas, por ejemplo $P = (0, 1, 0)$. Es decir;

$$\pi = P + V_\pi = (0, 1, 0) + \langle (-2, 1, 1), (-1, 1, 0) \rangle\,.$$

Sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = -2\lambda - \mu\,, \quad y = 1 + \lambda + \mu\,, \quad z = \lambda\,.$$

Y una ecuación implícita de π es $x + y + z = 1$.