ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA. 1º FÍSICAS

El espacio dual. Geometría afín.

1. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2 y $\{e_1, e_2\}$ una base de E con base dual $\{\omega_1, \omega_2\}$.
La base dual $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2\}$ de la base $\{\bar{e}_1 = e_1 - e_2, \bar{e}_2 = e_1 + e_2\}$ de E es:
a) $\{\bar{\omega}_1 = \omega_1 - \omega_2 \,,\, \bar{\omega}_2 = \omega_1 + \omega_2\}$
b) $\{\bar{\omega}_1 = \omega_1 + \omega_2 \,,\, \bar{\omega}_2 = \omega_1 - \omega_2\}$
c) $\{\bar{\omega}_1 = \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2 \,,\, \bar{\omega}_2 = \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2\}$

2. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) Los vectores $\bar{e}_1 = 2e_1 + e_3$, $\bar{e}_2 = e_2 - e_1$, $\bar{e}_3 = e_1 + e_3$ forman una base de E cuya base dual es:

$$\{\bar{\omega}_1 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 \,,\, \bar{\omega}_2 = \omega_2 \,,\, \bar{\omega}_3 = -\omega_1 - \omega_2 + 2\omega_3\}$$

b) Las formas lineales $\bar{\omega}_1 = \omega_1 + \omega_2$, $\bar{\omega}_2 = \omega_3$, $\bar{\omega}_3 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3$ forman una base de E^*, que es la base dual de la base

$$\{\bar{e}_1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \,,\, \bar{e}_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3 \,,\, \bar{e}_3 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2\}$$

c) Las formas lineales $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3 \in E^*$ de coordenadas respecto de la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ de E^*: $\bar{\omega}_1 = (0, 1, 0)$,$\bar{\omega}_2 = (-1, 0, 0)$, $\bar{\omega}_3 = (1, 0, 1)$ forman una base de E^*, la base dual de

$$\{\bar{e}_1 = (0, 1, 0) \,,\, \bar{e}_2 = (-1, 0, 1) \,,\, \bar{e}_3 = (0, 1, 1)\}$$

d) Los vectores de coordenadas $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, -1, 1)$, $\bar{e}_3 = (1, 1, 0)$ respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, forman una base de E cuya base dual es:

$$\{\bar{\omega}_1 = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 \,,\, \bar{\omega}_2 = \omega_2 \,,\, \bar{\omega}_3 = \omega_2 + \omega_3\}$$

3. Sea $E = \langle 1, x, x^2 \rangle$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 y sea $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ la base dual de $\{1, x, x^2\}$. Considérese la base de E determinada por los polinomios $2 + x^2$, $x - 1$, $1 + x^2$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) La base dual de la base $\{2 + x^2 \,,\, x - 1 \,,\, 1 + x^2\}$ es:

$$\{\bar{\omega}_1 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 \,,\, \bar{\omega}_2 = \omega_2 \,,\, \bar{\omega}_3 = -\omega_1 - \omega_2 + 2\omega_3\}$$

b) Las coordenadas de la forma lineal $\omega = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3$ en la base dual de $\{2+x^2 \,,\, x-1 \,,\, 1+x^2\}$ son $\omega = (3, -2, 2)$.
c) Si $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3\}$ es la base dual de $\{2 + x^2 \,,\, x - 1 \,,\, 1 + x^2\}$, las coordenadas de la forma lineal $\omega = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ en la base $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ son $\omega = (1, 2, 3)$.

4. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E y sea $T : E \to E$ la aplicación lineal definida por:

$$T(e_1) = e_1 - e_3 \,, \quad 2e_1 + e_2 \in \ker T \,, \quad T(e_3) = e_1 + e_2$$

La matriz del morfismo traspuesto $T^* : E^* \to E^*$ respecto de la base dual de $\{e_1, e_2, e_3\}$ es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. En $\mathbb{R}^3$ sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) Unas ecuaciones implícitas de la recta $r = \langle(1,-1,1)\rangle$ son. $r \equiv \begin{cases} x+y &= 0 \\ x-z &= 0 \end{cases}$.

b) La ecuación implícita del plano $\pi = \langle(1,0,2),(0,1,1)\rangle$ es $\pi \equiv 2x - y - z = 0$.

a) Unas ecuaciones implícitas de la recta $r = \langle(1,-1,1)\rangle$ son. $r \equiv \begin{cases} x+y &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$.

6. En $\mathbb{R}^3$ sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) El subespacio incidente del plano $\pi \equiv x - y + z = 0$ es $\pi^\circ \equiv \langle(1,-1,1)\rangle$.
b) El subespacio incidente con la recta $r = \langle(2,1,-1)\rangle$ es $r^\circ = \langle(1,2,0),(1,0,2)\rangle$.

c) El subespacio incidente con la recta $r \equiv \begin{cases} x+z &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$ es $r^\circ = \langle(1,0,1),(0,1,1)\rangle$.

d) El subespacio incidente con la recta $r \equiv \dfrac{x}{2} = y = -z$ es $r^\circ = \langle(1,0,2),(1,-2,0)\rangle$.

7. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y E_1 , E_2 subespacios vectoriales de E. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) ${E_1}^{\circ\circ} = E_1$, **b)** $(E_1+E_2)^\circ = E_1^\circ + E_2^\circ$, **c)** $(E_1 \cap E_2)^\circ = E_1^\circ + E_2^\circ$, **d)** $(E_1+E_2)^\circ = E_1^\circ \cap E_2^\circ$

8. Sean E_1 y E_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \langle(1,0,2),(0,-1,1)\rangle \quad ; \quad E_2 = \langle(-1,1,0),(1,1,1)\rangle$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**
a) $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$; **b)** $E_1^\circ = \langle(-2,1,1)\rangle$, $E_2^\circ = \langle(1,1,-2)\rangle$
c) $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$, $E_1 \cap E_2 = \langle(1,1,1)\rangle$; **d)** $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$, $E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}$

9. Sea E_1 el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $u_1 = (1,0,1,0)$, $u_2 = (0,-1,2,1)$, $U_3 = (1,1,-1,-1)$.
Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:
a) Su subespacio incidente es $E_1^\circ = \langle(-1,1,1,-1)\rangle$
b) Su ecuación implícita es $E_1 \equiv x - y - z + t = 0$
c) Su subespacio incidente es $E_1^\circ = \langle(1,-2,-1,0),(0,1,0,1)\rangle$

d) Sus ecuaciones implícitas son $E_1 \equiv \begin{cases} x - 2y - z + t &= 0 \\ y + t &= 0 \end{cases}$

10. Sea E_1 el subespacio de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones implícitas $\begin{cases} x - y + t &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ x - y - z - t &= 0 \end{cases}$

Es **falso** que:
a) $E_1^\circ = \langle(1,-1,0,1),(2,1,1,0),(1,-1,-1,-1)\rangle$
b) $E_1^\circ = \langle(1,-1,0,1),(2,1,1,0),(3,0,0,-1)\rangle$
c) E_1 es el subespacio generado por el vector $e = (1,4,-6,3)$
d) $E_1^\circ = \langle(1,-1,0,1),(2,1,1,0),(1,2,1,-1)\rangle$

11. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales E_1 y E_2 generados, respectivamente, por los vectores $\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\}$ y $\{(1,1,0,1),(1,2,-1,2),(3,5,-2,5)\}$.
Es **cierto** que:

a) Las ecuaciones implícitas de E_1 son $\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x-y+z-t &= 0 \end{cases}$

b) El subespacio incidente con E_2 está generado por la forma lineal $\omega = (1,-1,-1,0)$.
c) Los subespacios incidentes de E_1 y E_2 son respectivamente:

$$E_1^\circ = \langle(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\rangle \quad ; \quad E_2^\circ = \langle(0,1,1,-1)\rangle$$

d) La ecuación implícita de $E_1 + E_2$ es $y - t = 0$.

12. Considérense los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \langle (2,1,1), (1,1,1) \rangle \quad ; \quad E_2 \equiv x - y + z = 0$$

Es **cierto** que:
a) $E_1 \cap E_2 = \langle (0,1,-1) \rangle$ **b)** E_1 y E_2 son planos paralelos.
c) E_1 y E_2 se cortan en la recta de ecuaciones implícitas $E_1 \cap E_2 \equiv \begin{cases} y - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{cases}$

13. Sea r la recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $P = (1,2,3)$ y cuyo subespacio director está generado por el vector $e = (-1,1,1)$.
Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) Las ecuaciones paramétricas de r son $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$
b) Unas ecuaciones implícitas de r son $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \end{cases}$
c) Todo punto $(x,y,z) \in r$ satisface las ecuaciones $\dfrac{x-1}{-1} = y - 2 = z - 3$
d) Unas ecuaciones implícitas de r son $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

14. Sea π el plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $P = (0,1,-3)$ y cuyo subespacio director está generado por los vectores $u_1 = (1,1,0)$ y $u_2 = (0,-1,1)$.
Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) Unas ecuaciones paramétricas de π son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = -3 - \mu \end{cases}$
b) La ecuación implícita de π es $\pi \equiv x - y - z = 2$.
c) π es el plano paralelo al plano de ecuación $x-y-z = 0$ que pasa por el punto $A = (3,1,0)$.
d) π es el plano paralelo al plano de ecuación $x-y-z = 0$ que pasa por el punto $A = (1,0,1)$.

15. Sea π' el plano de $\mathbb{R}^4$ que pasa por el punto $P = (0,1,2,3)$ y que es paralelo al plano $\pi = (1,2,0,1) + \langle (0,1,1,-1), (-1,0,1,0) \rangle$.
Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) El subespacio director de π' está generado por los vectores $u_1 = (0,1,1,-1)$, $u_2 = (-1,0,1,0)$.
b) Las ecuaciones paramétricas de π' son:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mu \\ y &= 1 - \lambda \\ z &= 2 - \lambda - \mu \\ t &= 3 + \lambda \end{aligned}\right\}$$

c) El plano π' es paralelo al plano de ecuaciones implícitas $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$
d) Unas ecuaciones implícitas de π' son $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + t = 4 \end{cases}$

16. Sean r y π una recta y un plano de $\mathbb{R}^4$ que pasan por el origen. Es **falso** que:

a) La recta r es paralela al plano π precisamente si la dirección de r coincide con una de als direcciones del plano π.
b) La recta r es paralela al plano π si y sólo si el subespacio director del plano π contiene al subespacio director de la recta r.
c) Sea $\{\omega, \omega'\}$ es una base del subespacio incidente de π, $\pi^\circ = \langle \omega, \omega' \rangle$ y $r = \langle e \rangle$. La condición necesaria y suficiente para que r y π sean paralelos es que se verifique:

$$\omega(e) = \omega'(e) = 0$$

d) El plano π es paralelo a la recta r si el subespacio incidente de π contiene al subespacio incidente de r.

17. Sean r y s las rectas de $\mathbb{R}^4$ definidas por:

$$r \equiv \frac{x}{3} = y + 1 = \frac{z}{2} = \frac{t-1}{2} \quad ; \quad s = (-1, 3, 0, 1) + \langle (3, 1, 2, 1) \rangle$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) Las rectas r y s no son paralelas.
b) La recta r es paralela al plano $\pi \equiv \begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$
c) La recta s es paralela al plano π' de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 3\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = -2 + 2\mu \\ t = 1 + \lambda + \mu \end{cases}$$

d) La recta s es paralela al plano $\pi \equiv \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$

18. Dados los planos $\pi \equiv x + y + z = 1$, $\pi' \equiv 2x - y + 2z = 2$ y los puntos $A = (2, 1, 3)$, $B = (2, 3, 1)$. L aecuación del plano π'' que pasa por la intersección de los planos π y π' y por el punto medio del segmento AB es:
a) $\pi'' \equiv x - y + z = 1$; **b)** $\pi'' \equiv 2x + 2y - 3z = 2$
c) $\pi'' \equiv 2x - 3y + 2z = 2$; **d)** $\pi'' \equiv x + 2y + z = 1$

19. Dada la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$, está contenida en el plano $\pi \equiv x + y + z = 3$ y es paralela al plano $2x - y = 3$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) $r \equiv \begin{cases} -x + 2y + z & = 2 \\ 2x - y & = 1 \end{cases}$; **b)** $r \equiv x = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-4}{-3}$
c) $r \equiv x - 1 = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$; **d)** $r \equiv \begin{cases} x + y + z & = 3 \\ 3x + z & = 1 \end{cases}$

20. La ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv x = y = z - 2$ y es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} x - y & = 1 \\ x + y - z & = 0 \end{cases}$ es:
a) $x - y + z = 2$; **b)** $x = y$; **c)** $x - y = 2$; **d)** $x - y - z = 2$

21. Las ecuaciones de la recta r coplanaria con la recta $s \equiv \dfrac{x-1}{2} = y = z - 3$, que pasa por el origen y es paralela al plano $x + 2y + z = 1$ son:
a) $r \equiv \begin{cases} x + 2y + z & = 0 \\ 3x - 5y - z & = 0 \end{cases}$; **b)** $r \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{11}$

c) $r \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{-11}$; **d)** $r \equiv \begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ 4x + 3y &= 0 \end{cases}$

22. Las ecuaciones de la recta s que pasa por el punto $P = (1, 2, 1)$ y se apoya en las rectas $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y - 1 = \dfrac{z-1}{3}$ y $r' \equiv \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases}$ son:

a) $s \equiv \begin{cases} 2x + y + 3z &= 7 \\ x + y - z &= 0 \end{cases}$; **b)** $s \equiv \begin{cases} x - y + z &= 1 \\ 3x - 2z &= 0 \end{cases}$

c) $s \equiv \begin{cases} 3x - 2z &= 1 \\ x - y + z &= 0 \end{cases}$; **d)** $s \equiv \begin{cases} x + 2y - 2z &= 0 \\ 3x - 2z &= 1 \end{cases}$

23. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) La recta $r \equiv \begin{cases} x - 3y + 2z &= 1 \\ 2x + y - z &= 0 \end{cases}$ está contenida en el plano $\pi \equiv 3x - 2y + z = 1$

b) La recta $r \equiv \begin{cases} x - y - 3z &= 1 \\ 2x - 2z &= 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 2$ son paralelos.

c) Las rectas $r \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{4}$ y $s \equiv \begin{cases} 4x - 3z + 3 &= 0 \\ 4x + y - 3z &= -1 \end{cases}$ son coplanarias.

d) La intersección del plano $\pi \equiv 2x - 3y + z = 0$ con la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - z &= -1 \\ y - 3z &= -2 \end{cases}$ es el punto $P = (1, 1, 1)$.

24. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y &= 2 \\ 2x - y - z &= 3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x &= 2 \\ y &= 1 - 3\lambda \\ z &= 2 + 2\lambda \end{cases}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) La mínima subvariedad afín que contiene a r y a s es $\mathbb{R}^3$.

b) La recta r está contenida en el plano $5x - 2y - 3z = 7$ y la recta s está contenida en el plano $5x - 2y - 3z = 2$.

c) Las rectas r y s son coplanarias.

d) Las rectas r y s se cruzan.

25. El valor de λ para que el plano $\pi \equiv 2x + \lambda y - z = 2$ sea paralelo a la recta $r \equiv \dfrac{x}{2} = y + 1 = z - 2$ es:

a) $\lambda = -1$; **b)** $\lambda = 0$; **c)** $\lambda = -3$; **d)** $\lambda = 1$

26. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:

a) La ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv x = y = z$ y es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} x + y &= 1 \\ x - z &= 2 \end{cases}$ es $\pi \equiv x - z = 0$.

b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos $A = (1, -1, 2)$, $B = (2, 1, 1)$ y $C = (1, 2, 1)$ es $\pi \equiv x + y + 3z - 6 = 0$.

c) La ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (3, -1, 2)$ y es paralela a los planos π y π' de ecuaciones $\pi \equiv x + y - z = 2$, $\pi' \equiv 2x - y - z = 1$ es $r \equiv \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2x - y - z &= 5 \end{cases}$.

d) La ecuación del plano π que pasa por el punto $P = (0, 3, 1)$ y contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2x - y - z &= 3 \end{cases}$ es $\pi \equiv x + y - z = 2$.

27. Sean α y β números reales y considérense la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z &= \beta \\ 2x-y+z &= 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv \alpha x + y + 2z = -1$.
Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) Si $\alpha = \dfrac{5}{2}$ y $\beta = -1$ la recta r está contenida en el plano π.
b) La recta r y el plano π son paralelos para $\alpha = \dfrac{5}{2}$ y cualquier valor de β.
c) Si $\alpha \neq \dfrac{5}{2}$ y $\beta \neq -1$ la recta r y el plano π se cortan en un único punto.
d) La recta r y el plano π no tienen ningún punto en común para $\alpha = \dfrac{5}{2}$ y cualquier valor de β.

28. En $\mathbb{R}^4$ sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) Dos planos se pueden cortar en una recta.
b) Dos planos se pueden cortar en un punto.
c) Dos hiperplanos se pueden cortar en una recta.
d) Dos hiperplanos se pueden cortar en un plano.

29. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y &= 1 \\ y-z &= 0 \\ z+t &= 1 \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x &= -3-\lambda \\ y &= -1 \\ z &= 4+\lambda \\ t &= 7+\lambda \end{cases}$ Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) La mínima subvariedad afín que las contiene es el hiperplano de ecuación $x+z=1$.
b) Las recats r y s se cortan en el punto $P=(2,-1,-1,2)$.
c) La mínima subvariedad afín que las contiene es el plano de ecuaciones $\begin{cases} x+z &= 1 \\ x+2y+t &= 2 \end{cases}$.
d) La mínima subvariedad afín que las contiene es $H \equiv (0,1,1,0)+\langle(0,-1,0,2),(-1,0,1,1)\rangle$.

30. Considérense las subvariedades afines de $\mathbb{R}^4$:

$$H \equiv (1,0,0,1)+\langle(-1,1,1,-1)\rangle \quad H' \equiv (0,-1,1,4)+\langle(-1,0,1,1),(3,0,-3,-3)\rangle$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) $H \cap H' = P = (2,-1,-1,2)$
b) $H+H' \equiv \begin{cases} 2y-z+t &= 1 \\ x+z &= 1 \end{cases}$
c) $H+H' \equiv (1,0,0,1)+\langle(0,1,0,-2),(1,0,1,1)\rangle$
d) $H+H' \equiv (0,-1,1,4)+\langle(-1,1,1,-1),(-2,1,2,0)\rangle$

31. La mínima subvariedad afín de $\mathbb{R}^4$ que pasa por los puntos $A=(0,1,0,1)$, $B=(0,0,0,0)$, $C=(1,2,3,2)$, $D=(1,-1,3,-1)$ es:
a) $\mathbb{R}^4$
b) El hiperplano de ecuación $3x+y-z-t=0$.
c) El plano $\pi \equiv \langle(1,1,3,1),(1,-1,3,-1)\rangle$
d) El plano de ecuaciones $\begin{cases} 3x-z &= 0 \\ y+t &= 0 \end{cases}$

32. Dadas las subvariedades afines de $\mathbb{R}^4$ definidas por los puntos

$$H = \{(0,-1,0,1),(1,1,0,1),(0,0,1,0)\} \quad , \quad H' = \{(-2,1,1,0),(-3,0,0,1)\}$$

Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

a) H es un hiperplano que contiene a la recta H'.
b) H es un plano que se cruza con la recta H'.
c) H' es una recta que corta al plano H en el punto $P=(1,7,7,-5)$.
d) $H\cap H'=(\frac{1}{2},\frac{7}{2},\frac{7}{2},-\frac{5}{2})\quad ,\quad H+H'\equiv z+t=1$.

33. Dados los planos de $\mathbb{R}^4$ $\pi\equiv\begin{cases}x+y-z &=0\\ x-z+t &=2\end{cases}$ y $\pi'\equiv\begin{cases}x+z &=4\\ y+t &=6\end{cases}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:
a) Se cortan en la recta de ecuaciones $x-1=y-2=z-3=t-4$.
b) Se cortan en el punto $P=(1,2,3,4)$
c) Son paralelas.
d) Se cruzan.

34. Dados dos hiperplanos H y H' de $\mathbb{R}^4$, sólo una de las afirmaciones siguientes es **falsa**:
a) H y H' se pueden cortar en un plano.
b) H y H' pueden ser paralelos y no coincidentes.
c) H y H' se pueden cortar en una recta.
d) La mínima subvariedad afín que los contiene puede ser $\mathbb{R}^4$.

35. Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases}x &=2+3\lambda\\ y &=1-\lambda\\ z &=-1+2\lambda\\ t &=3-2\lambda\end{cases}\ ;\quad s\equiv\begin{cases}x &=7\lambda\\ y &=1\\ z &=1+\lambda\\ t &=-1+2\lambda\end{cases}$. Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:

a) La recta que se apoya en ambas y pasa por el origen es $\begin{cases}x-6z &=0\\ y-11t &=0\\ z-7y &=0\end{cases}$.
b) Hay infinitas rectas que se apoyan en ellas y que pasan por el origen.
c) La recta que se apoya en ambas y pasa por el origen es $\frac{x}{2}=y=\frac{z}{7}=\frac{t}{11}$.
d) La recta que se apoya en ambas y pasa por el origen es $\begin{cases}x+4y-5z-t &=0\\ x-6z &=0\\ t-11y &=0\end{cases}$.

36. La mínima subvariedad afín que contiene a las rectas de ecuaciones

$$x=y=z=t\quad ,\quad \frac{x-1}{3}=\frac{y}{5}=z-2=\frac{t}{-4}$$

es:
a) El plano $\pi\equiv\langle(1,1,1,1),(3,5,1,-4)\rangle$.
b) El hiperplano $\pi\equiv\langle(1,1,1,1),(3,5,1,-4),(1,3,-1,-6)\rangle$.
c) No es ni un plano ni un hiperplano.
d) El hiperplano $H\equiv 2x-y-z=0$.

37. Dada la recta $r\equiv\begin{cases}2x-z+t &=2\\ y+z &=-3\\ 2x+y &=-2\end{cases}$ y el plano $\pi\equiv\begin{cases}x+z-t &=5\\ x-t &=3\end{cases}$.
Sólo una de las afirmaciones siguientes es **cierta**:
a) Se cortan en un punto.
b) La recta está contenida en el plano.
c) Se cruzan.
d) Son paralelos.

El espacio dual. Geometría afín.

1. c) ; **2. d)** ; **3. c)** ; **4. b)** ; **5. b)** ; **6. b)** ; **7. b)** ; **8. d)** ; **9. c)** ; **10. d)** ;
11. d) ; **12. c)** ; **13. d)** ; **14. d)** ; **15. d)** ; **16. d)** ; **17. d)** ; **18. c)** ; **19. d)** ; **20. b)** ;
21. a) ; **22. c)** ; **23. d)** ; **24. c)** ; **25. c)** ; **26. d)** ; **27. d)** ; **28. c)** ; **29. a)** ; **30. c)** ;
31. c) ; **32. d)** ; **33. b)** ; **34. c)** ; **35. d)** ; **36. d)** ; **37. c)**